Facultad de Psicología

Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación

Programa de doctorado

“Desarrollo psicológico, aprendizaje y educación: perspectivas contemporáneas”

TESIS DOCTORAL

El papel de las habilidades de transferencia y autorregulación en la resolución de problemas algebraicos en estudiantes de secundaria

Autora: Adelaida Moral Bosch

Director: Jesús Alonso-Tapia

Madrid, 2017

INDICE

RELACIÓN DE GRÁFICOS, TABLAS Y FIGURAS

1. *Tablas y Figuras de la parte teórica*.

A) Tablas

B) Figuras

AGRADECIMIENTOS

A lo largo el proceso laborioso e interesante que ha supuesto la elaboración de mi tesis doctoral, debo agradecer la ayuda constante, paciencia, saber hacer y orientaciones acertadas de mi tutor de tesis. Gracias a sus directrices, comentarios y recomendaciones, he aprendido mucho a lo largo de este camino.

También quiero agradecer el apoyo continuo, ideas y comentarios de mi familia, de mis padres, David y Pilar, a los cuales dedico el presente trabajo.

Por lo que respecta a mis amigos también quiero incluirlos en estos agradecimientos, ya que su interés por mi trabajo, sus sugerencias y su capacidad de alegrarse por mis alegrías, y de estar ahí cuando las cosas no iban tan bien, los sitúa en un apartado importante de esta tesis doctoral.

Por último, agradecer al profesorado de matemáticas y tutores, gracias a cuya desinteresada y espléndida colaboración, he podido llevar a cabo en la práctica, las ideas que tenía yo en mente. Y por supuesto, agradezco la colaboración de todos y cada uno de los estudiantes que han participado en este experimento, sin cuyo interés y ganas por hacer las cosas bien y por participar, nunca hubiera sido posible. Al fin y al cabo, todo esto es para ellos: para nuestros queridos estudiantes. Ojalá esta tesis sea un poso más que sirva para transmitirles suficientes herramientas como para saber resolver los problemas que acucian en un mundo tan tecnológico y cambiante como el actual.

Muchas gracias a todos y a ti lector, espero que las siguientes páginas sean de interés y la lectura amena y constructiva para todos.

RESUMEN

Antecedentes y objetivos

Los adolescentes se enfrentan a la ardua tarea de asimilar los contenidos algebraicos en una etapa como la de secundaria, llena de cambios para ellos. Debido a lo anterior, es necesario hacer uso de métodos educativos que sean eficaces para que logren asimilar, comprender y aplicar el álgebra, tanto en el propio curso como en cursos y etapas posteriores, y en su propia vida cotidiana. Uno de los problemas que contribuye a impedir la interiorización de los conocimientos algebraicos y su aplicación es la dificultad para autorregular los factores motivacionales, emocionales y estratégicos que intervienen en el proceso de aprendizaje, así como la falta de un entrenamiento que facilite el desarrollo de los procesos implicados en la transferencia de los conocimientos que se van adquiriendo a distintos tipos de problemas. Por ello, el objetivo de la presente tesis ha sido la elaboración, aplicación y valoración de un método de entrenamiento en habilidades de autorregulación y transferencia, que según los trabajos consultados, lograría producir mejoras en la resolución de problemas algebraicos en esta población.

Metodología

Para valorar la efectividad de nuestro método de entrenamiento, un total de 142 adolescentes (77 mujeres y 65 varones), estudiantes de seis clases de tercero de secundaria obligatoria de un centro público de secundaria de la Comunidad de Madrid, participaron en la presente investigación. Los estudiantes tenían edades comprendidas entre 14 y 17 años. Se les dividió aleatoriamente en dos grupos, control y experimental. Y se les aplicó el programa de intervención durante 8 sesiones en clases naturales.

Debido a que podían influir como variables moderadoras en el resultado de nuestro experimento, se procedió a controlar tanto la evaluación del Clima Motivacional de la Clase (*Cuestionario de Clima Motivacional de la Clase (CMCQ) (*Alonso-Tapia y Fernández, 2008), como la capacidad lectora (*Prueba de Lectura*. *Batería CL-4*, Alonso-Tapia y otros, 1997), y los conocimientos matemáticos previos (*prueba de conocimientos matemáticos previos*).

Durante la aplicación del programa, se resolvieron todos los ejercicios del *Cuaderno de problemas para el entrenamiento*. Además, - para que no hubiera diferencias en los grupos control y experimental- se explicó a todos los estudiantes el tipo de reglas que debían poner en funcionamiento para resolver los problemas algebraicos. Por su parte, con motivo de facilitar la asimilación y comprensión por parte de los estudiantes del grupo experimental de en qué consistía la autorregulación, se les expuso a la vista en la pizarra durante todo el experimento un *Póster con reglas para la autorregulación* (adaptado del procedimiento S.A.C.). Además, el entrenamiento estuvo acompañado de un recordatorio y evaluación de la autorregulación tanto por medio de un *Esquema para la autorregulación,* como de un *Cuestionario para evaluar el progreso en el aprendizaje de la autorregulación (EVPAR).* En cuanto a la transferencia, se trabajó por medio del propio orden y clasificación que tenían los ejercicios del cuaderno de problemas.

Por lo que respecta a la medición de las variables dependientes, por un lado, las habilidades de autorregulación se evaluaron con un *Cuestionario de autorregulación elaborado "ad hoc"* (CAR), y con el *Cuestionario de mensajes autorregulatorios de la emoción y la motivación (CMA, EMSRQ en la publicación)* (Alonso-Tapia, Panadero y Ruiz, 2014); y por el otro, las habilidades de transferencia se evaluaron con una *Prueba de transferencia de conocimientos algebraicos (PT).*

Resultados y conclusiones

El presente estudio muestra que el programa de intervención tiene las características adecuadas como para desarrollar en los adolescentes las habilidades de autorregulación y transferencia necesarias para mejorar la capacidad de resolver problemas algebraicos en estos estudiantes. Además, los datos estadísticos apoyan el modelo según el cual, un aumento en el adolescente de la capacidad de autorregular la propia tarea unida al entrenamiento explícito de la transferencia propicia que mejore de forma significativa en la ejecución algebraica. En concreto, los resultados indican una disminución significativa de los mensajes de autorregulación de la motivación y la emoción que configuran un estilo centrado en la evitación, y un incremento de los mensajes de autorregulación dirigidos al proceso que configuran el estilo de autorregulación centrado en el aprendizaje, en los estudiantes de la condición experimental, mientras que no ha ocurrido lo mismo en los de la condición control. Asimismo, los resultados han puesto de manifiesto una mejora en la autorregulación de la mayor parte de las estrategias que configuran el proceso de solución de problemas en general y algebraicos en particular, significativamente superior en los sujetos de la condición experimental respecto a los de la condición control, así como un incremento de la percepción de confianza y mejora en la capacidad de solución de los problemas trabajados. Finalmente, la transferencia ha sido igualmente superior en los alumnos de la condición experimental. Además, un resultado importante aunque no directamente buscado, ha sido el papel moderador del "clima motivacional de clase": cuanto más orientado está al aprendizaje, mejor es el tipo de autorregulación de los alumnos. Los hechos anteriores permiten concluir, pues, que el tipo de entrenamiento en habilidades de autorregulación y transferencia utilizado, apoyado en el uso de esquemas de autoevaluación del proceso tras realizar cada problema, y en una secuenciación de los tipos y complejidad de los problemas para facilitar la transferencia, puede utilizarse con provecho para producir una mejora en la resolución de problemas algebraicos en estudiantes de tercero de educación secundaria obligatoria.

SUMMARY

Background and objectives

Teenagers have to learn algebraic contents in an educational stage as high school, so full of changes for them. Due to the above, it seems necessary to make use of effective educational methods in order to achieve a better assimilate, understanding, and ability to apply the algebra, both in their courses and later stages, as in their own lives. One of the problems that contributes to prevent the internalization of algebraic knowledge and its application, is the difficulty for self-regulate the motivational, emotional and strategic factors that are involved in the learning process, as well as a lack of training that facilitates the development of the processes involved in the transfer of the knowledge which is acquired to the different types of problems. Therefore, the objective of the present thesis has been the elaboration, application and valuation of a method of training method in self-regulation and transfer skills which, according to the works consulted, would lead to improvements in the resolution of algebraic problems in this population.

Methodology

In order to assess the effectiveness of our training method, a total of 142 adolescents (77 females and 65 males), from six secondary classes of a public center or de Community of Madrid, participated in the present research. The students were between the ages of 15 and 16. They were randomly divided into two groups, control and experimental. And they were given the intervention program for 8 sessions in natural classes.

Because they could influence as moderating variables in the result of our experiment, we proceeded to control both the evaluation of the Motivational Class Climate (Motivational Class Climate Questionnaire, CMC-Q Alonso Tapia &Fernández, 2008), as Reading ability (Reading test. Battery CL-4, Alonso Tapia &col., 1997), and previous mathematical knowledge (mathematical knowledge pre-test).

During the implementation of the program, all exercises of the Notebook of the problems for the training were solved. Moreover, in order to avoid differences between the control and experimental groups, all the students were explained the type of rules that should be put in place to solver algebraic problems. For its part, in order to facilitate the assimilation and understanding by students of the experimental group of what self-regulation consisted of, they were exposed on the blackboard throughout the experiment a Poster with rules for self-regulation (adapted from the SAC procedure). In addition, the training was accompanied by a reminder and evaluation of self-regulation, both through a scheme for self-regulation and a Questionnaire to assess the progress of self-regulation learning (EVPAR). As for the transfer, it was worked through the own order and classification that had the exercises of the notebook of problems.

With respect to the measurement of the dependent variables, on the one hand self-regulation skills were evaluated with an "ad hoc" self- regulation Questionnaire (CAR), and with the Emotional and Motivational Self-regulated Questionnaire (EMSRQ, Alonso-Tapia, Panadero & Ruiz, 2014); and on the other, transfer skills were evaluated with an algebraic knowledge transfer test (PT).

Results and conclusions

The present study shows that the intervention program has the adequate characteristics to develop in adolescents the self-regulation and transfer skills necessary to improve the ability to solve algebraic problems in these students. In addition, statistical data support the model according to which an increase in the adolescent´s ability to self-regulate the task itself, coupled with the explicit training of the transfer, leads to a significant improvement in algebraic execution. Specifically, the results indicate a significant decrease in self-regulation messages of motivation and emotion that configure a style focused on avoidance, and an increase in the messages of self-regulation directed to the process that configure the style of self-regulation centered in the students´ learning of the experimental condition, whereas the same has not happened in those of the control condition. Similarly, the results have shown an improvement in the self-regulation of most of the strategies that configure the problem solving process in general and algebraic in particular, significantly higher in subjects of the experimental condition than those of the control condition, as well as an increase in the perception of confidence and perception of confidence and improvement in the ability to solve the problems worked. Finally, the transfer has been equally superior in students of the experimental condition. In addition, an important but not directly sought outcome, has been the moderating role of the “motivational class climate”: the more oriented the learning is, the better the type of self-regulation of students. The previous facts allow us to conclude that the type of training in self-regulation and transfer skills used, supported by the use of self-evaluation schemes after each problem, and in a sequencing of the types and complexity of the problems to facilitate the transfer, can be used with advantage to produce an improvement in the resolution of algebraic problems in third course of secondary education.

INTRODUCCIÓN

Cuando mi director de tesis me propuso entre un abanico de posibilidades hacer mi tesis en relación con la dificultad de aprendizaje de las matemáticas, he de reconocer que me sorprendió. No porque las matemáticas hubieran sido fáciles o difíciles como contenido de aprendizaje en sí mismo, sino porque en realidad no sabía por dónde empezar a investigar. El problema era que había mucha producción científica en relación a esta cuestión cuyos resultados parecían no concordar con lo que se estaba haciendo en las aulas en relación a la enseñanza de esta asignatura.

Recuerdo que debido a lo anterior, en esos inicios de mi tesis doctoral, me pareció adecuado – y así lo hice – empezar haciendo sondeos en varios institutos a profesores de matemáticas. El motivo era averiguar qué suponía para ellos que tantos estudiantes continuaran teniendo problemas y dificultades al aprender esta asignatura. Así, mantuve varias entrevistas con estos profesores y les dejaba un breve cuestionario con preguntas muy sencillas relativas a cuál era para ellos el tipo de fallos que cometían los adolescentes a la hora de aprender esta asignatura considerada tradicionalmente como difícil. Las respuestas no se diferenciaban demasiado de unos centros a otros. La mayoría iba en la línea de que los adolescentes parecían no estar lo suficientemente motivados por la asignatura, así como tampoco prestaban atención en clase, no preguntaban dudas y trabajaban muy poco en casa. A partir de los resultados de esta mini-encuesta, se podían deducir dos cosas. La primera era que parecía seguir persistiendo entre los estudiantes una concepción innata de las matemáticas. Según este perjuicio, si “se te dan bien”, nunca se tendrán problemas para entenderlas, y en el caso contrario, no se podría hacer nada para comprenderlas. La otra cuestión, que yo entiendo primordialmente derivada de la primera, es el elevado nivel de desmotivación que continúa rodeando al aprendizaje de esta asignatura. La mayor parte de esta desmotivación vendría porque los adolescentes no considerarían rentable invertir ningún tiempo ni esfuerzo en estudiar estos contenidos en el caso de que ellos percibieran que efectivamente, no se les daban bien. La consecuencia es que el estudiante acaba limitando su contacto con las matemáticas a hacer muchos problemas, con el fin de aprobar los exámenes y en cuanto pueda, no volver a cursarlas nunca más.

Todo lo anterior forma parte de lo anecdótico, pero enseguida empecé a hacer búsquedas más organizadas. Mi tutor me ha ofrecido a lo largo de este camino una gran ayuda y guía para encontrar esas piezas tan cotizadas por cualquier investigador, como son los artículos cargados con datos y hechos originarios de cualquier parte del mundo, pero muy relevantes para el tema que nos ocupa.

Como he dicho con anterioridad, las matemáticas son algo más que hacer ejercicios. Sin embargo, un estudiante de secundaria típico, sólo se pondrá por las tardes con las matemáticas en su pupitre de trabajo si tiene ejercicios que resolver. En caso contrario, ni sacará el libro de su mochila. Es cierto que la adolescencia a nivel general no es un momento óptimo para ponerse a estudiar aquello que suponga un verdadero esfuerzo. Ahora bien, no estaría de más trabajar esta tendencia generalizada de los estudiantes a no estudiar absolutamente nada sobre la teoría de las matemáticas de sus libros de texto. Es imposible comprender los problemas si no se ha entendido una mínima parte de la teoría. Y sin embargo, nadie la estudia.

En esta idea mágica del estudiante de secundaria medio, según la cual, las matemáticas se te dan bien o no sin importar lo duro que las trabajes, no cabe aceptar ni un solo fracaso frente a un ejercicio. Esto implica que, en cuanto no saben resolver dos o tres problemas, llegan a la conclusión de que efectivamente no se les da bien y abandonan los intentos de comprenderlas. A partir de decisiones como la anterior, los adolescentes continúan avanzando en las matemáticas con la base aritmética de primaria –mejor o peor aprendida– y cuando deben enfrentarse a un problema algebraico, la mayoría no tiene herramientas cognitivas suficientes como para saber cómo resolverlo.

Situaciones como la anterior suponen que los alumnos pasen por secundaria resolviendo los ejercicios matemáticos usando la memoria y aprobando -una mayoría- con muchas dificultades los cursos más altos hasta que finalmente logran no tener que cursar matemáticas nunca más.

Sin embargo, esta materia es primordial debido a muchas razones. Entre ellas, por algo que el adolescente no logra entender, y es su aplicación a la vida cotidiana. Así, en cualquier situación en la que haya que resolver cuestiones relacionadas con la métrica, o el espacio, o la aritmética, las matemáticas constituyen una ayuda innegable. Pero además, es una materia que ayuda a comprender elementos teóricos que forman parte de la ciencia y que impulsan la tecnología. Así, según Orji (2010), "sin matemáticas no habría ciencia, sin ciencia no habría tecnología, y sin tecnología no habría una sociedad moderna como la actual".

Y no sólo a nivel cotidiano, la practicidad de estos contenidos también capacita para percibir, formular y resolver problemas de otras disciplinas (Odili, 2011). Autores como Alechenu (2012) la consideraría en ese sentido la "reina" de las ciencias, ya que, sin ella no sería posible ni el acceso, ni la comprensión de disciplinas como la física, la química, la biología o la tecnología.

Además, es mucho lo que esta asignatura podría hacer por los estudiantes. Les abre la mente al razonamiento lógico y analítico (Harbor-Peters, 2001), debido a lo cual debería incrementarse su enseñanza, también con el fin de mejorar en el desarrollo y toma de decisiones en distintas profesiones, no sólo en las tradicionalmente relacionadas con las matemáticas como la ingeniería, o la música, sino también en las de artes (Egodawatte, 2011). Por otra parte, es innegable que estos contenidos constituyen en muchos casos una puerta para acceder a nuevos conocimientos en los tramos educativos posteriores a la secundaria obligatoria (Fennell, 2008).

Ahora bien, si hay un contenido matemático que tiene especial trascendencia para un estudiante de secundaria, es el *álgebra* (Kieran, 1989, 2007). Este contenido está en los planes de estudio para promover que el adolescente sea capaz de hacer un cambio en su forma de pensar sobre los problemas matemáticos. Así, los estudiantes deben ir abandonando progresivamente el tipo de razonamiento simple sobre objetos concretos que han aprendido en primaria, e ir alcanzando razonamientos más complejos con respecto a los llamados "estados matemáticos". Estos estados son difíciles de entender para un adolescente porque son de tipo teórico y se refieren a relaciones y no a objetos. Por ejemplo, la relación entre el espacio y el tiempo explicaría la velocidad.

Desde el proceso de enseñanza, el profesor procura estimular al estudiante a hacer estos cambios de razonamiento. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones, no se logra este cambio. El adolescente continúa llevando a cabo razonamientos aritméticos – sobre objetos y unidades concretas -, durante toda la etapa de secundaria. E incluso aplica este tipo de razonamientos para resolver los problemas que no son aritméticos, como los algebraicos, de geometría, etc.

Debido al hecho anterior, el problema parece estar en que muchos estudiantes no llegarían a adquirir de forma espontánea esta forma algebraica de pensar y esto les imposibilitaría la comprensión de los ejercicios algebraicos que deben resolver durante toda la etapa de secundaria. Así, se hace necesario estimular con un método educativo adecuado un cambio en el tipo de razonamiento de los adolescentes, desde un pensamiento más concreto hasta alcanzar habilidades cognitivas tales como las siguientes:

- Ser capaz de pensar de forma lógica.
- Saber hacer uso de principios matemáticos.
- Darse cuenta de cuáles son las relaciones entre variables en un problema.
- Saber extraer los aspectos esenciales de un problema.
- Ser capaz de analizar y organizar adecuadamente los datos de un problema.

Ahora bien, en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en secundaria uno de los objetivos cruciales tanto por parte del profesorado como de los investigadores, es el de conseguir que los adolescentes las comprendan y las sepan aplicar. Este reto ha supuesto que se hayan llevado a cabo numerosos trabajos en donde se ha realizado el entrenamiento de distintas variables personales con el fin de encontrar aquella o aquellas que influyan más positivamente en dicho aprendizaje.

Una de las variables que parece mejorar la comprensión algebraica, sería la capacidad de regular el propio trabajo (Flavell, 1981; Shoenfeld, 1985; Wilson y Clarke, 2004). Esta autorregulación no se refiere – o no únicamente- a saber hacerse esquemas, organizarse y hacerse controles para saber si se están resolviendo adecuadamente los problemas. En realidad, la autorregulación entendida como proceso, es algo más interno, e implica no sólo las tareas de organizar y controlar la propia tarea, sino también los mensajes que los estudiantes se dan mientras están resolviendo las tareas matemáticas. En este sentido, ser capaz de darse mensajes positivos dirigidos a aprender, mientras dura todo el proceso del resolver el problema, iría a favor de la comprensión del mismo.

La importancia de la autorregulación radica en que, cada vez que el adolescente se encuentra frente a una dificultad cuando está resolviendo un problema algebraico, sepa darse el mensaje regulador adecuado que le lleve a seguir adelante en la búsqueda de la solución. Así, es bastante probable que un estudiante que se diga a sí mismo cuando no entiende un problema "Ánimo, ahora voy a leer otra vez el enunciado y tratar de ver qué es lo más importante", acabe encontrando una solución. Sin embargo, el mismo estudiante es posible que abandone si frente al mismo problema, piensa "Jamás lo voy a entender".

Debido a la importancia de los mensajes que configuran el proceso de autorregulación, sería relevante entrenar a los adolescentes en el tipo de mensajes específicos que deberían darse cuando están en la ardua tarea de encontrar la solución a un problema cuyo planteamiento no entienden. Este es el sentido en el que la autorregulación podría ayudar a mejorar mucho la comprensión de los problemas algebraicos.

Otro tipo de resultados experimentales, van en la línea de que el adolescente mejore su capacidad de transferir lo que ya sabe a los nuevos ejercicios (Cooper y Sweller, 1987; Confrey, 1991; Fuchs, 2003; Maccini, Mulcahy, y Wilson, 2007). Ahora bien, esta cuestión no se trata - o no sólo-, de que el estudiante se haga un buen esquema y lo aplique a los problemas nuevos parecidos a los que ya conoce. En realidad, y al igual que ocurría con la autorregulación, la habilidad de transferencia mejoraría la comprensión, si se entiende y se trabaja como un proceso cognitivo. En este caso, la transferencia debería apoyarse en una comprensión suficiente del problema algebraico, a partir de la cual, el adolescente sacaría sus propias conclusiones. Estas conclusiones el estudiante las catalogaría como pertenecientes a tal o cual tipología de problema, y serían la premisa a partir de la cual apoyaría sus razonamientos a la hora de resolver ejercicios nuevos del mismo tipo. Es decir, un adolescente no está haciendo una transferencia adecuada cuando su conclusión al finalizar un problema de ecuaciones es anotar la ecuación y más adelante copiarla cuando se le presente un problema similar. Sin embargo, si frente al mismo problema, el estudiante se fija bien en las condiciones del enunciado y entiende porqué la ecuación que usa es la que mejor refleja dichas condiciones, es probable que sepa cómo llegar a la ecuación adecuada en problemas similares, incluso mucho más complejos.

La importancia de que los alumnos autorregulen su comportamiento de modo adecuado al enfrentarse a los problemas matemáticos, y de que tomen conciencia de los elementos básicos del proceso de solución cuya comprensión facilita la transferencia nos han llevado a investigar la posible efectividad del entrenamiento explícito de ambos procesos. Esta decisión, sin embargo, se ha tomado también sobre la base del modo y grado en que se presenta el problema del aprendizaje del álgebra, y del análisis de sus posibles causas, puntos que pasamos a describir antes de pasar al análisis de los supuestos teóricos en que se ha basado la presente tesis.

El problema.

Los estudiantes de secundaria suelen tener una dificultad creciente para resolver adecuadamente problemas matemáticos. La realidad del día a día en la clase de matemáticas muestra una “amplia casuística de dificultades, bloqueos y errores” a la hora de resolver este tipo de problemas (Booth y Johnson, 1984; Callejo, 2003, Edogawatte, 2011). Este hecho implica que muchos estudiantes rinden en matemáticas por debajo de sus posibilidades, y no parece que muestren indicios de mejora (Bybee y Stage, 2005; Lemke y Gonzales, 2006). En concreto, parece que los mayores problemas con el álgebra, los tendrían los estudiantes de edades comprendías entre los 12-14 años, porque es el momento en el que deben trasladar los contenidos de los problemas aritméticos –que son contenidos concretos-, al campo del álgebra – que son contenidos abstractos (Filloy y Rojano, 1984; Stiphout, 2011); siendo los aspectos que estarían incidiendo en esta cuestión los siguientes:

- La necesidad de que el adolescente se centre en las relaciones y funciones algebraicas, a partir de representaciones tales como gráficos, fórmulas o tablas aritméticas.
- El hecho de que se inicia -desde la instrucción de enseñanza-, a los estudiantes a desarrollar sus propias estrategias situacionales, informales y pre formales; y se empieza a prestar mucha menos atención al desarrollo de rutinas procedimentales.

- Y, por último, el hecho de que el inicio de los aprendizajes algebraicos, coincide con el momento en que los estudiantes empiezan a trabajar de forma autónoma, tanto en clase como fuera de clase.

Este bajo nivel de ejecución se ha intentado mejorar mediante diferentes iniciativas: planificando bancos de ejercicios para hacer prácticas de resolución de problemas; explicando con claridad los problemas; resolviendo dudas en el momento en que se producen; estableciendo los criterios de evaluación de la asignatura lo más flexibles y centrados posible en la comprensión de los conceptos más que en la memorización de los mismos; y promoviendo el desarrollo de habilidades cognitivas para resolver problemas que luego puedan aplicarse para resolver problemas de la vida real.

Sin embargo, según la Secretaría de Estado de Educación, Formación Profesional y Universidades, estas iniciativas no han obtenido muy buenos resultados y las dificultades de los estudiantes siguen dándose en un tanto por ciento muy elevado. El último informe PISA de 2015, incluyó una muestra de aproximadamente 540000 estudiantes, de una población de alrededor de 29 millones de estudiantes de 15 años de colegios de los 72 países participantes. En España se ha conseguido en matemáticas una puntuación media de 486. Esta puntuación sigue estando por debajo del promedio de la OCDE (490) en 4 puntos. Y por debajo del total de la UE (493) en 7 puntos.

Los resultados anteriores, de acuerdo con los cuales el rendimiento de los estudiantes españoles en matemáticas se sitúa en el intervalo de 481.6 a 490.1 puntos, con un 95% de confianza (MECD, 2016), son similares a los de Portugal (490), Islandia (488) o Letonia (482). En cuanto a las comunidades autónomas españolas, las puntuaciones más elevadas en matemáticas corresponden a la Comunidad Foral de Navarra (518), Castilla y León (506), La Rioja (505) y la Comunidad de Madrid (503). De hecho, estas puntuaciones son significativamente superiores al promedio de los países de la OCDE (490). En la Figura 1.1 se presentan estos resultados. Además, es interesante saber en qué elementos se basan los distintos niveles de conocimientos matemáticos, elementos que se incluyen en la Tabla 1.1.

En relación con la Figura 1.1, conviene indicar que en la OCDE, el 23.4% de los estudiantes de 15 años estarían en los niveles más bajos de rendimiento en matemáticas (niveles < 1 y 1), y que en España, el resultado sería prácticamente el mismo, ya que un

22.2% de los alumnos no alcanzaría el nivel 2. Sí habría, sin embargo, diferencias en matemáticas por género, como muestra la Figura 1.2. Según los datos que recoge, habría una diferencia a favor de los chicos que en el promedio de los países de OCDE alcanzaría 8 puntos, en la Unión Europea (UE) alcanzaría 11 puntos y en España, 16 puntos. Las mayores diferencias se alcanzarían en Austria (27), Italia (20) y Chile (18), y no habría diferencias en Singapur que además obtendría los mejores resultados en desempeño matemático (564). En cuanto a comunidades autónomas españolas, las mayores diferencias se darían en la Comunidad de Madrid y Cataluña – con más de 18 puntos en ambos casos-, y las más bajas en Castilla y León, con apenas una diferencia de 5 puntos a favor de los chicos.

Según los resultados presentados, aunque un estudiante de 15 años debería ser capaz de resolver los problemas matemáticos que puede encontrarse en su vida cotidiana, de poner en relación representaciones abstractas, y de llevar a cabo razonamientos teóricos sobre dichas representaciones, el adolescente medio español no llega a esos conocimientos. La mayoría de los adolescentes parecen ser capaces de resolver problemas sencillos sobre situaciones concretas siempre que en el enunciado esté incluida toda la información necesaria. Ahora bien, en cuanto deben hacer razonamientos basados en representaciones abstractas, les cuesta realizarlo. Ahora bien el contenido matemático en donde precisamente se requiere pensar en forma de representaciones abstractas es el álgebra. De ahí que los estudiantes españoles tengan tantas dificultades en el aprendizaje de estos contenidos matemático.

Los hechos recogidos dieron lugar a las preguntas que motivaron el planteamiento de nuestro trabajo, a saber:

1) ¿De qué dependen las dificultades que tienen los adolescentes en el aprendizaje del álgebra?
2) ¿Qué líneas de intervención educativa favorecerían el aprendizaje del álgebra?
3) ¿Qué faltaría por averiguar o investigar – línea de investigación, tipo de método, forma de aplicación de métodos conocidos, etc.- que aún no esté investigado con respecto a las preguntas anteriores?

4) Posibles causas

Las dificultades en el aprendizaje del álgebra dependen tanto del grado de dificultad de los propios contenidos algebraicos, como de los factores cognitivos y emocionales que deben movilizar los estudiantes debido a tales dificultades.

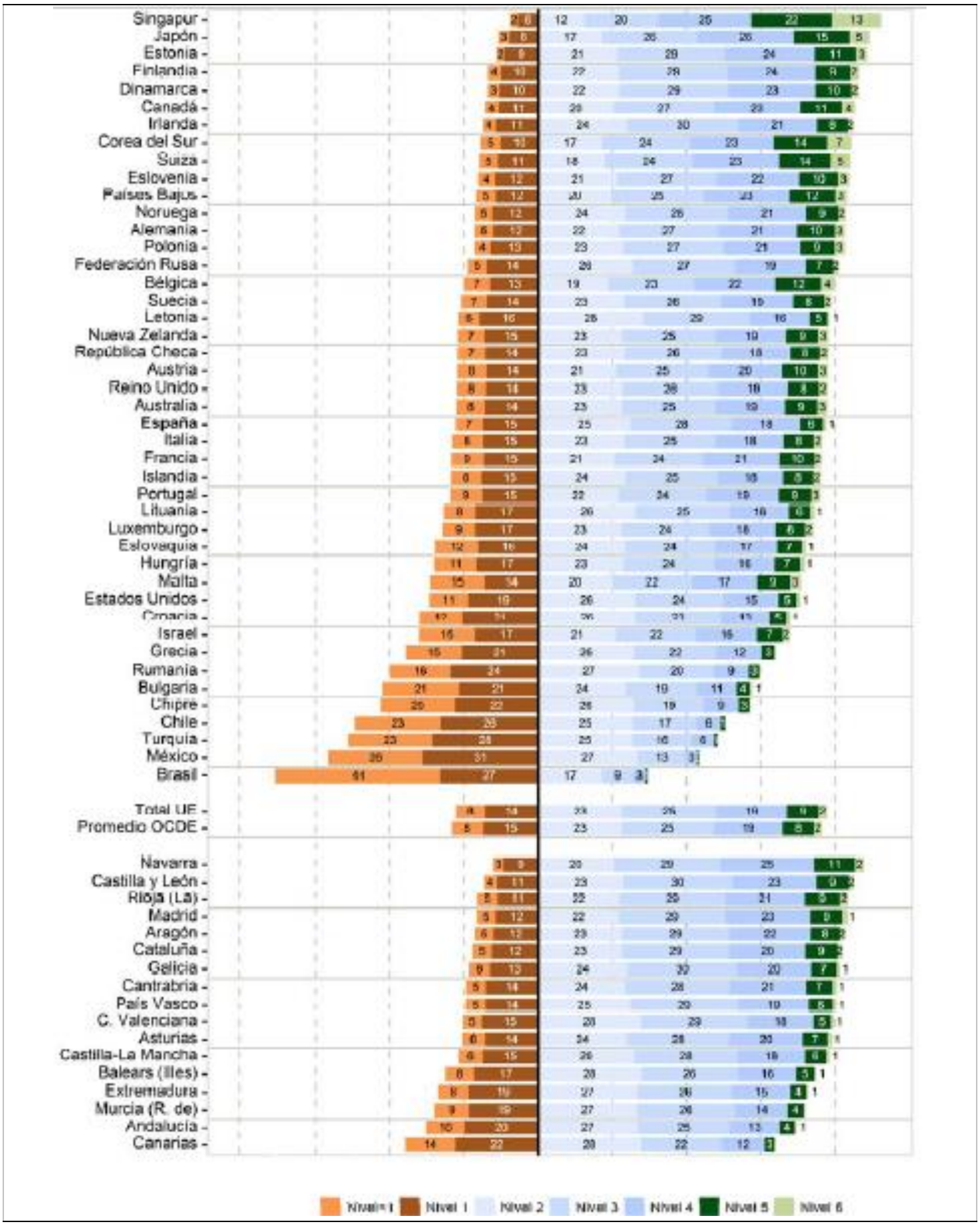


Figura 1.1.Distribución de los alumnos por niveles de rendimiento en matemáticas (PISA, 2015)

Tabla 1.1. Síntesis de los descriptores de los niveles de rendimiento en matemáticas

Nivel	*Límite inferior de puntuación*	***Descripción del nivel de rendimiento***
6	669	Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Además, pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de forma flexible. Tienen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado y pueden aplicar su entendimiento y comprensión para abordar situaciones nuevas.
5	607	Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes. Además, pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas para solucionar los problemas. Pueden trabajar de forma estratégica, reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	545	Pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Además, pueden seleccionar e integrar distintos tipos de representaciones, incluidas las simbólicas. Saben elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones.
3	482	Saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo los que requieren decisiones secuenciales. También pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Además, saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, razonar directamente a partir de ellas, y exponerlas en breves escritos.
2	420	Saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Además, saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Y, por último, son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	358	Saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos en los que está presente toda la información pertinentes y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Saben identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Además, pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los enunciados presentados.

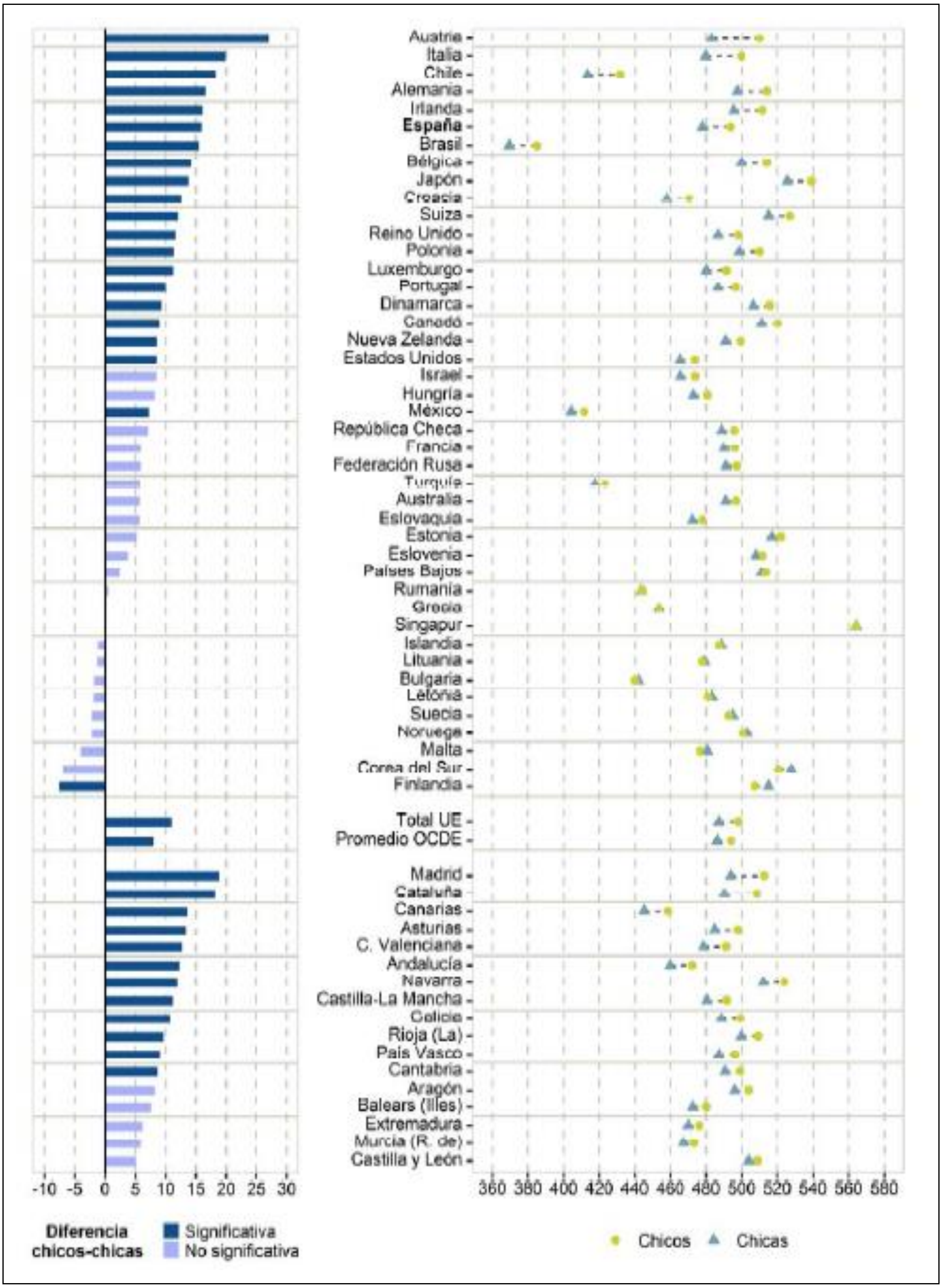


Figura 1.2. Diferencias de puntuaciones medias en matemáticas según el género

Por lo que se refiere a la dificultad de resolver problemas de *contenidos algebraicos* se debe a que la solución de los mismos no tiene que corresponderse con un único número o con un número entero como ocurría con un problema aritmético. La solución a un problema ya no será algo similar a: *x = 7,* siendo 7 un número entero y natural, sino que puede ser: *x= 2, 4, 8,* es decir, una serie de números; o: *x = y-2*, es decir, un número que puede variar en función del valor que adopte la otra incógnita - en este caso *y*-, o sea un número variable.

En cuanto a las *dificultades de tipo cognitivo,* según los trabajos consultados los estudiantes tendrían problemas debido a la tendencia general a cometer errores de procedimiento, a dificultades para organizar la información y a déficits tanto en la memoria de trabajo, como en la memoria a largo plazo (Geary, 2004; Miller y Mercer, 1997).

Finalmente, *por lo que respecta a los problemas emocionales*, parece que los alumnos con dificultades específicas perciben los problemas matemáticos como especialmente difíciles, que necesitan más tiempo para terminarlos, y que usan menos estrategias que sus compañeros para resolverlas (Montague y Applegate, 2000).

Eficacia de las líneas de actuación

En tercer lugar, la investigación consultada ha llevado a cabo la aplicación y valoración de diversos métodos de entrenamiento en resolución de problemas algebraicos a estudiantes de secundaria (Alonso Tapia, 2012; Abonyi y Nweke, 2014; Areelu y Akinsola, 2014; Arnau y Puig, 2013; Barrus, 2014; Chow, 2011; Egodawatte, 2011; Ely y Adams, 2012; Ferguson, 2014; Foegen, 2010; Gustafsson, 2011 y 2016; Hattikudur y Alibali, 2010; Hughes, 2014; Ives, 2007; Jitendra, 2013; Kieran, 2008; Kramarski, Weiss y Sharon, 2013; Ladele, 2013; Lian, 2012; Maccini, 2007; Mayfield y Glenn, 2008; McNeil, N., Rittle-Johnson, B., &Hattikudur, S., 2010; Mok, 2010; Montague, 2007; Ntsohi, 2013; Orji, 2010; Panasuk, 2010; Pullen y col, 2011; Rakes, 2010; Rimby, 2012; Rittle-Johnson y Star, 2007; Shin y Pedrotty, 2015; Stiphout, 2011; Strickland, T.&Maccini, P, 2010; Strobino, 2013; Tall, 2008; Witzel, B., Mercer, C.,& Miller,M., 2003) y estudiantes universitarios (English, L., 2008), llegando a la conclusión de que para facilitar la comprensión y solución de problemas algebraicos, es necesario:

- Tener en cuenta qué reglas siguen los estudiantes para resolver los problemas.
- Enseñar de forma explícita estrategias de autorregulación a la hora de resolver problemas matemáticos.
- Enseñar de forma explícita como transferir los procedimientos aprendidos a problemas diferentes de los trabajados durante el aprendizaje.
- Considerar cuál es el clima motivacional que hay en la clase de matemáticas.

El análisis de los estudios consultados ha puesto de manifiesto que hay poca investigación sobre la efectividad de actuar de acuerdo con los principios señalados en la etapa de Educación Secundaria. En consecuencia, parecía necesario estudiar la efectividad de actuar de acuerdo con los principios descritos –entrenar la autorregulación y la transferencia- a la hora de enseñar los contenidos del álgebra. Con este fin se han consultado diferentes trabajos cuyos resultados se describen a continuación, así como las perspectivas que abren sobre el uso de la autorregulación y transferencia en el campo de la resolución de problemas matemáticos, proporcionando el entorno teórico para el desarrollo de esta tesis.

PRIMERA PARTE

MARCO TEÓRICO

1.1. Investigación actual sobre la resolución de problemas matemáticos en general y algebraicos en particular

Los trabajos que han tenido como objeto de estudio la resolución de problemas algebraicos empezaron a realizarse a finales de los años 90, con objetivos muy diferentes a los de los trabajos realizados durante los años 80 y principios de los 90, en los cuales el objetivo era averiguar qué hacían los estudiantes aventajados en la resolución de problemas algebraicos. Se trataba de estudios encuadrados en una perspectiva que consideraba al álgebra como un contenido matemático más, sin entidad propia en el campo de las matemáticas, y la resolución de problemas algebraicos como un proceso de uso y aplicación de técnicas sin conexión entre sí ni con otros campos de conocimiento matemático (English, 2008). Eran estudios dirigidos a averiguar qué hacían los estudiantes habilidosos en matemáticas para averiguar qué características tenían los estudiantes capaces en esta área. Sin embargo, a partir de finales de los años noventa, se empezó a considerar el álgebra como una entidad de estudio independiente, por lo que los trabajos sobre investigación matemática empezaron a tener como objetivo la mejora de la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos. Esta línea de investigación ha seguido hasta la actualidad, en donde los trabajos se pueden enmarcar en uno de los tres tipos siguientes, según English (2008):

a) Trabajos que investigan el efecto de técnicas de instrucción como el modelado y el moldeamiento –hacia los alumnos y de los alumnos entre sí –sobre lo que hacen los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos (English, 2008; Goldin, 2003) y algebraicos (Chow, 2011; Orji,2010; Strobino, 2013) en el contexto natural de una clase, así como de entrenamiento en habilidades cognitivas específicas en la resolución de problemas algebraicos (Chow, 2011; Panasuk, 2010;y Rittle-Johson y Star, 2007).

b) Trabajos que hacen una evaluación y valoración de los resultados académicos en matemáticas de estudiantes de distintos países, con el fin de ofrecer sugerencias a los países participantes sobre cuáles son los fallos que cometen sus estudiantes y cómo ayudarles a mejorarlos. Estos trabajos han sido impulsados fundamentalmente por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (O.C.D E.), impulsora del *"Programme for International Student Assessment"* (P.I.S.A.), y la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA), impulsora del programa "*Trends in International Mathematics and Science Study"* (T.I.M.S.S.).

c) Y, por último, trabajos de difusión y discusión sobre los resultados de estudios experimentales ya realizados a través de vías tales como publicaciones, cursos de formación del profesorado, Congresos o Seminarios dirigidos a personal del ámbito educativo tanto científico como no científico.

A partir de estos tres tipos de trabajos, hemos recapitulado información sobre lo que se está haciendo en el campo de la resolución de problemas matemáticos en general y de problemas algebraicos en particular y las técnicas que se están mostrando más efectivas para mejorar la capacidad de resolución de los mismos. Sin embargo, antes de pasar a exponer estos trabajos y con el objetivo de mejorar la comprensión de su alcance conviene clarificar qué se entiende por resolver problemas matemáticos en general y problemas algebraicos en particular.

1.2. ¿Qué se entiende por resolver un problema matemático?

Se podría definir la competencia matemática como la "capacidad de los individuos para razonar matemáticamente y utilizar conceptos, datos y herramientas matemáticas para explicar y predecir fenómenos" (Pisa 2012). Teniendo en cuenta esta definición, un estudiante con conocimientos matemáticos, tendría capacidades de investigar, conjeturar, hacer uso de estrategias de resolución de problemas, administrar y verificar, y hacer uso del lenguaje matemático y trabajar en un contexto de problema matemático (Goos y col, 2007).

Hay un problema matemático cada vez que aparece una situación en la que hay que averiguar un dato desconocido en donde intervienen elementos tales como la cantidad, la estructura, el espacio o el cambio de objetos. Un problema matemático está dentro de la matemática que es una ciencia axiomática, es decir, formada a partir de axiomas, cuyo objetivo es el estudio de las propiedades y relaciones cuantitativas entre números, figuras geométricas y símbolos; por lo que resolver un problema matemático implica tener en cuenta todos estos aspectos. No siempre se sigue un razonamiento lógico para resolver un problema matemático. Por ejemplo, calcular la medida que se ha olvidado de la pared de una habitación que se quiere pintar en la tienda de pintura, no exige hacer un razonamiento de este tipo. Sin embargo, cuando hay varias incógnitas a averiguar o varias dimensiones del problema a tener en cuenta, sí que será necesario este tipo de razonamiento. En este caso, se trata de problemas matemáticos propiamente dichos.

Un problema es matemático propiamente hablando, cuando tiene una o varias incógnitas las cuales representan a entidades desconocidas que pueden ser numéricas, gráficas, etc., y que hay que resolver siguiendo las condiciones fijadas en el enunciado de dicho problema. La exigencia de tener en cuenta dichas condiciones, implica que, para resolver un problema matemático, el estudiante debe elaborar una estrategia de actuación en donde incluya los pasos a dar para averiguar la entidad o entidades desconocidas y así resolver el problema. Como la estrategia y los pasos a dar se elaboran a partir de las condiciones fijadas en aquél, dichos pasos serían la consecuencia del razonamiento previo que ha hecho el sujeto para resolver el problema y además servirían como demostración de la solución que dé al mismo. Por ejemplo, en el problema, *"En un almacén hay 120 botellas de agua de 2 litros, ¿cuántos litros de agua hay en total?"*, la cantidad desconocida es numérica, ya que se trata de un problema de Aritmética elemental, por lo que sería suficiente con que el estudiante siguiera las condiciones fijadas en el problema para encontrar la solución y no haría falta el uso de ninguna estrategia. Los pasos a dar podrían ser los siguientes:

- Extraer la información numérica relevante del enunciado, que en este caso sería: "*120 botellas de agua, botellas de 2 litros"*.
- Identificar la incógnita que pide el enunciado, es decir, la "*cantidad total de agua"*.
- Relacionar los datos en una operación aritmética de producto como la siguiente: "*120 · 2"*.
- Resolver la operación aritmética y averiguar la cantidad desconocida, que en este caso es: "*240 litros de agua en total*".

En este caso, al ser un problema aritmético, los pasos que debe dar el estudiante están enmarcados en el tipo de pregunta que se formula - la cual pide una operación de multiplicación-, por lo que no hace falta que elabore una estrategia para resolver ni este problema, ni un problema aritmético nuevo. Por el contrario, para resolver problemas algebraicos, el adolescente está obligado a elaborar una estrategia y aplicarla de forma singular en cada problema nuevo, ya que cada problema supone un tipo de razonamiento diferente.

En cuanto a los procesos cognitivos que movilizan los estudiantes cuando están aprendiendo matemáticas- desde el punto de vista del constructivismo social y la teoría sociocultural- los adolescentes construirían conocimiento relacionando patrones – o esquemas- conocidos, con esquemas nuevos (Hiebert y Carpenter, 1992). Por lo tanto, el estudiante construiría conocimiento en matemáticas, a partir de un proceso, que tiene como fin construir el significado propio de las entidades matemáticas (Goldin, 1990), a partir de experiencias previas y en términos de conocimientos que el sujeto ya tiene (Cobb, Wood y Yackel, 1990), a partir de los cuales lleva a cabo las acciones necesarias para resolver los problemas.

En cuanto al contexto, los estudiantes no incrementarían conocimiento sobre los problemas matemáticos "per sé", sino dentro de un contexto social en donde aprender implicaría "construir con otros" (Franke, Kazemi y Battey, 2007), y donde cada conocimiento individual significaría un trampolín para alcanzar peldaños más altos de conocimientos (Vygotsky, 1978).

Por último, y debido a que las matemáticas también se describen como una actividad cultural, resolver problemas matemáticos también implicaría hacer uso de un lenguaje propio matemático como una herramienta cultural para comunicar (Cobb, 2000), la cual tendría su propio vocabulario, representaciones y símbolos.

1.3. ¿Qué se entiende por resolver un problema algebraico? El papel del álgebra dentro de las matemáticas

Es una posición muy extendida entre los teóricos de las matemáticas sostener la afirmación de que un problema matemático es algebraico cuando hay "verdaderas incógnitas" en el enunciado del problema. Esto quiere decir que son problemas en donde, por primera vez, el estudiante debe identificar y enfrentarse a situaciones problemáticas en donde se incluye el concepto de valor desconocido. Resolver un problema donde hay valores desconocidos, supone para un estudiante tener que operar no sólo con entidades numéricas- números enteros, fraccionales, primos, etc- como en aritmética, tanto elemental como compleja, sino también tener que trabajar con incógnitas las cuales pueden referirse efectivamente a entidades numéricas, pero también a entidades variables – un grupo de números, otra incógnita, un sistema de variables, etc- (Alonso Tapia, 2012, p.171).

Esta dificultad "per se" que supone resolver problemas algebraicos para cualquier adolescente, incluso problemas de álgebra elemental, implica que ya no será suficiente con que el estudiante aplique los pasos que se puedan deducir de las condiciones incluidas en el enunciado del problema, sino que además debe planificar una estrategia de resolución única para resolverlo. Esto es, una *primera característica* definitoria de lo que significa *resolver un problema algebraico, sería la de la necesidad de que el estudiante elabore una estrategia para resolverlo.*

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema algebraico:

"Juan compra en una tienda un videojuego de baloncesto y dos de tenis por 280 euros. Si el precio del videojuego de baloncesto es el doble que el de tenis, ¿Cuánto costará cada videojuego?"

Para resolverlo, el estudiante debe elaborar una estrategia que incluya la construcción de un mapa cognitivo único con los aspectos esenciales - significativos- del enunciado para, a partir de dicho mapa, organizar los datos conocidos y desconocidos en expresiones algebraicas llamadas ecuaciones, resolverlas, hallar la solución, revisarla y finalmente anotarla. En este caso, el adolescente debería aplicar una estrategia de resolución como la siguiente:

a) En el problema *se pide* el valor de los videojuegos de baloncesto y de tenis.

b) Luego, *hay dos valores desconocidos*, a los que se puede llamar "x" – videojuego baloncesto- e "y" - tenis-.

c) Los videojuegos de baloncesto *cuestan el doble* que los de tenis, *luego*: x = 2y.

d) La suma de los dos videojuegos, uno de baloncesto y dos de tenis, costaron 280 euros, luego:

$$\left.\begin{array}{c} x + 2y = 280 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

Un *segundo aspecto* identificativo de un problema algebraico y que lo diferencia de un problema aritmético es que *el valor de la incógnita que se pide en el enunciado puede ser variable,* lo que quiere decir que la incógnita adoptará un valor u otro en función de los valores que adopten las otras entidades con las que dicha incógnita está formalmente relacionada desde el punto de vista matemático. Por ejemplo, en el problema siguiente: *"En un almacén hay en total 120 botellas de agua y de aceite. Si hay 170 litros en total, repartidos en botellas de agua de 1 litro y de aceite de 2 litros, ¿Cuántas botellas de cada tipo hay? "*.

Una vez realizada una lectura detenida del enunciado y adoptada una estrategia de resolución - en donde el estudiante identifique dicho problema como perteneciente al tipo de sistemas de ecuaciones - el adolescente debe hacer una anotación algebraica como la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x + 2y = 170 \end{array}\right\}$$

En esta anotación, se observa que el estudiante ha puesto en relación cantidades que se desconocen, siendo necesario que el sujeto resuelva las ecuaciones del sistema de forma que, dependiendo del valor que adopte una de las incógnitas, así será el valor de la otra incógnita.

Una *tercera característica* definitoria de un problema algebraico, es que en el enunciado y en la forma de proceder, *se trabaja con "relaciones entre variables*", lo que quiere decir que las relaciones entre las entidades algebraicas no están definidas exclusivamente por operaciones tales como suma, resta, multiplicación o división, como en Aritmética; sino en referencia a sistemas que están fuera de dichas variables, tales como el sistema numérico, por ejemplo el Log_3N , u otra entidad que a su vez puede ser variable o constante. Por ejemplo, el resultado de Log_3N es fijo y se conoce consultando el sistema numérico, mientras que el resultado de la expresión: $20x=2y$, dependerá o variará en relación a los valores que adopten los símbolos-incógnitas- x e y.

Ahora bien, dentro de los problemas algebraicos, según autores como Ladele (2013) un tipo de problemas que son especialmente difíciles para los estudiantes, serían los llamados "problemas enunciados en palabras (*Word problems*), por oposición a problemas enunciados numéricamente, los cuales Verschaffel, Greer y De Corte (2000, p. IX) definieron como:

"Descripciones verbales de situaciones de problemas en donde una o más cuestiones guían la búsqueda de la respuesta, la cual se puede obtener por medio de la aplicación de operaciones matemáticas con datos numéricos, que están en el enunciado del problema.”

Los problemas enunciados en palabras, son importantes para desarrollar una comprensión del Álgebra, aunque se suelen percibir como difíciles (Kieran, 2007; Reed, 1999). Requieren de las habilidades cognitivas de lectura, interpretar textos y transformar palabras dentro de su contexto en una forma simbólica, y todo ello antes de empezar en una búsqueda de estrategias manipulativas o de cálculo (Newman, 1983a; Oviedo, 2005; y Pimm, 1991).

Desde el punto de vista de autores como Ladele (2013), por lo tanto, “*el razonamiento algebraico dependería de la comprensión de un número determinado de ideas clave, cuya equivalencia y variabilidad serían dos de los aspectos más fundamentales*” (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005, p. 68).

Teniendo en cuenta lo que se entiende por razonamiento algebraico y por resolver un problema algebraico, habría que clarificar qué debe hacer un estudiante de tercero de secundaria para resolver un problema de este tipo, ya que el objetivo de todo entrenamiento debe centrarse justamente en facilitar la adquisición de los conocimientos conceptuales y procedimentales implicados en la competencia que se espera que el alumno desarrolle.

1.4. ¿Qué debe hacer un estudiante de tercero de secundaria para resolver un problema algebraico?

Casi todos los investigadores en matemáticas, estarían de acuerdo con la afirmación siguiente de Kilpatrick: “C*ada vez que un estudiante se enfrenta a un problema, está obligado a reformularlo*” (Kilpatrick, 1987a). Esto quiere decir que un estudiante siempre debe hacer algún tipo de reformulación o interpretación personal del problema que debe resolver que, aunque esté muy lejos del nivel de un experto, no deja de ser un análisis personal y singular del enunciado del problema que un problema aritmético no requiere para su resolución (Bednarz, y Janvier, 1996). El motivo es que el álgebra incluye intrínsecamente tanto en sus intenciones como en sus métodos, *representaciones y sistemas de símbolos* (Kaput, 1989, p. 169; Panasuk, 2010), que la aritmética no tenía, y por lo tanto, los adolescentes para resolver un problema nuevo, deben hacerse una representación del mismo, tanto de forma interna como externa (Goldin y Sheingold, 2001, p.2; Panasuk, 2010):

a) Al hacerse una representación interna del enunciado, el adolescente se construye una imagen mental en forma de lenguaje y símbolos matemáticos (Brunner, 1972), con el fin de dotar al problema de una estructura interna que le permita categorizarlo, es decir, asignarle una categoría e iniciar su resolución (Hiebert y Carpenter, 1992), teniendo en cuenta la información relevante e ignorando otros tipos de información (Matsuka y Sakamoto, 2007, p. 1139).

b) Pero sin conocer las reglas de funcionamiento de esos símbolos matemáticos, el adolescente no tendría suficiente información como para seguir un proceso de resolución eficaz, así que necesitará identificar y aprender las "reglas externas, límites o relaciones incluidas en esas configuraciones físicas" (Zhang, 1997, p.180). Estas reglas suelen ser convencionales y por lo tanto, están determinadas, y son definidas y aceptadas de forma objetiva (Goldin y Shteingold, 2001, p.4). Por ejemplo, al resolver ecuaciones, el adolescente tendrá que tener en cuenta reglas como la siguiente "si sumamos o restamos la misma cantidad (o expresión algebraica) a ambos miembros de la ecuación, las soluciones de la ecuación no cambian".

El adolescente comprenderá el significado de las entidades algebraicas, en la medida que sea capaz de integrar de forma comprensiva en su estructura de conocimientos, ambos tipos de representaciones – tanto internas como externas (Goldin y Shteingold, 2001); alcanzando una comprensión de las reglas que le permita interiorizarlas en dicho sistema de conocimientos y no simplemente memorizarlas (Kaput, 1999). Por ejemplo, un estudiante entendería mejor el concepto de "multiplicación" si se le introdujera la representación externa de esta operación ("X") como un símbolo que sustituiría – o reemplazaría- símbolos repetidos de suma (e.g., 4 + 4 + 4 = 4 x 3). El resultado final de esta interacción es una simbolización personal por parte del estudiante del constructo "multiplicación" (4 + 4 + 4 = 4 x 3) con su representación externa ("x"), por lo que la imagen de la operación de multiplicación acabaría siendo su representación interna de la operación de multiplicación (Goldin Shteingold, 2001, p.2). Así, por medio de este proceso de asociación entre representaciones y lenguaje matemático, cada sistema representacional nuevo añadiría comunicación efectiva a la estructura cognitiva del adolescente y le facilitaría la transmisión de los diferentes significados de los distintos conceptos matemáticos.

Sin embargo, parece haber una tendencia natural en los adolescentes a no enfrentarse con el nivel de abstracción dado en el problema algebraico y a tratar de reducirlo a un nivel que les permita resolver dicho problema (e.g, Boulton-Lewis y Taid, 1993; Diezmann, 1999; Diezmann y Saradelich, 1997; Swafford y Landrall, 2000; Verschaffel, 1994), procurando convertir lo poco – o nada- familiar en algo más familiar, y lo abstracto en algo más concreto (Wilensky, 1991; Pape y Tochanov, 2001, Panasuk, 2010). Esto implica que, frente a un problema, el estudiante trata de hacer mentalmente más accesibles los conceptos (Hazzan y Zazkis, 2005, p.102), sucediendo esto, incluso cuando ya ha generado su propio sistema de representaciones sobre dicho problema.

Ahora bien, la exigencia que lleva implícita un problema algebraico para su comprensión y posterior resolución, es que el estudiante, conforme va avanzando en el proceso de sus aprendizajes algebraicos, debe aprender a incrementar y asimilar el nivel de abstracción de los contenidos algebraicos que tiene que ir asimilando (e.g., Cifarelli, 1998; Heibert y Lefevre, 1986; Mitchelmore y White, 2007; Skem, 1986; Wilensky, 1991), y esto supone ir avanzando a lo largo de las siguientes fases (Panasuk, 2010):

En un primer momento, el adolescente tratará de reducir el nivel de abstracción del problema algebraico según su intuición por ensayo y error, porque aún no ha adquirido la capacidad de razonar de una forma algebraica – más abstracta-, y por lo tanto, no es capaz de comprender lo que significa la representación simbólica de un concepto como puede ser, por ejemplo, el concepto de "relaciones lineales con un valor desconocido". En este caso, para resolver una ecuación como la siguiente, "$3x - 6 = 18$", su objetivo será reconducirla al nivel más bajo desde donde se pueda operar, seguramente por medio de métodos aritméticos- aislando la incógnita y resolviendo las operaciones necesarias- o por ensayo y error -reemplazando una letra "x" por un número-, hasta dar con la solución.

En un segundo momento, el estudiante de secundaria habrá asimilado cómo extraer la relación adecuada entre los valores conocidos y desconocidos de un problema de palabras, a manipular símbolos, a verbalizar de forma correcta los pasos que debe dar y a mostrar cierto grado de eficiencia sin necesidad de "reducir" el nivel de abstracción de dicho problema. En este nivel, el adolescente ya sabe cómo hacer una abstracción del concepto matemático como "proceso"- aunque aún no como "objeto"- y por lo tanto, su objetivo con el problema será manipular los símbolos, aunque ya no tiene necesidad de reducir el nivel de abstracción. Por eso, esta fase se conoce con el nombre de "abstracción estructural" (Cifarelli, 1988), ya que el adolescente es capaz de relacionar el concepto de "proceso" de una entidad matemática, con el concepto de "objeto" de esa misma entidad (Tall, 2008) y resolver el problema, pero sin llegar a alcanzar una comprensión conceptual- de significados- de dicha entidad. Debido a esto, el estudiante aún no tiene un pensamiento lo suficientemente flexible como para establecer conexiones entre las diferentes representaciones- palabras, dibujos o símbolos- que suelen caracterizar estructuralmente a una misma relación lineal, y se la considera como una fase de adaptación a la fase de auténtica comprensión de las operaciones algebraicas. Es, por ejemplo, el caso de saber cómo plantear y resolver un sistema de ecuaciones, e identificar cuál es la solución que encaja con el problema, pero el estudiante aún no identifica otras formas de resolverlo, como en el problema, "*Marcos y Juan se han gastado 33 euros en comprar 25 botellas de agua, de 75cl y 50 cl. ¿Cuántas botellas había de cada?*". En esta fase, el adolescente ya es capaz de asignar correctamente incógnitas, plantearlas en forma de ecuación y dar con la solución, así:

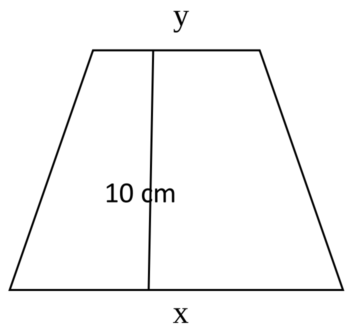
Siendo x = "*botellas de 1.5cl*" e y = "*botellas de 50cl*", entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 25 \\ 1.5x + y = 33 \end{array}\right\}$$

obteniéndose, al resolver el sistema de ecuaciones, que había 6 botellas de *1.5cl*. (x= 16) y 9 botellas de 50 cl. (y = 9).

En tercer y último lugar, el estudiante finalmente es capaz de operar con un nivel mayor de abstracción y de tomar conciencia de la estructura del problema, porque ha sabido relacionar el concepto de "proceso" con el de "objeto" (Tall, 2008). Esto implica que ya tiene la habilidad de pensar y actuar sobre la estructura de un problema como si fuera un objeto. Es la fase de comprensión conceptual, en la cual el estudiante ya es capaz de entender contenidos algebraicos como los siguientes: reconocer una misma relación estructural presentada en el problema de diferentes formas; saber cómo manipular las distintas representaciones – verbal, diagramática, numérica y simbólica- dadas en un problema; dar una explicación explicita sobre las estrategias usadas; comprender las estrategias básicas de cálculo; así como comprender el significado tanto de los valores desconocidos, como de las variables y expresiones en relación a esos valores desconocidos. En este momento, suele ser de ayuda la elaboración de un gráfico –diagrama, dibujo o mapa conceptual-, a partir del cual pueda construir los conceptos complejos necesarios para resolver el problema. Y es cuando el adolescente ya tiene suficiente habilidad en las llamadas operaciones formales (Inhelder y Piaget, 1958), a partir de las cuales será capaz de enfrentarse a niveles cada vez más altos de abstracción. Como, por ejemplo, en el problema: "La base mayor de un trapecio es 3 cm más larga que la menor; la altura del trapecio es de 10 cm y su área 45 cm², ¿Cuánto miden las bases?"

El estudiante es capaz de identificar el sistema de ecuaciones, apoyándose en un dibujo, así, llamando "x" a la base mayor e "y" a la base menor:



$$\left.\begin{array}{l} x = y + 3 \\ \text{Área} = [(x + y)\,10] / 2 = 45 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 3 \\ (x + y)\,5 = 45 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 3 \\ x + y = 9 \end{array}\right\}$$

$(y + 3) + y = 9$; $2y = 9 - 3$; $2y = 6$; $y = 3$; $x = 3+ 3 = 6$; $x = 6$,
siendo 6 lo que mide la base mayor y 3 lo que mide la base menor.

Esto supone que un adolescente aprende a resolver un problema algebraico primero "trabajando" sobre él – es decir, aplicándole procedimientos para resolverlo- y a continuación, entendiéndolo (Piaget, 1970). De ahí la diferencia que se ha establecido entre que el estudiante tenga un "concepto de proceso matemático" sobre el problema – en donde muestra capacidad para trabajar siguiendo los pasos mostrados por el profesor-, y la adquisición de un "concepto de objeto matemático" del problema – en donde el estudiante ya ha asimilado la naturaleza del concepto con sus propiedades, reglas y comprensión de cómo y por qué se aplican la reglas que se están aplicando-.

Para identificar qué hace un estudiante cuando resuelve un problema algebraico, habría que dar una definición de en qué consiste realmente la habilidad de resolver este tipo de problemas, con respecto a lo cual parece no haber unanimidad (Bell, 1996; Billstein, Libeskind, y Lott, 2001; Campbell, Peterson, y Yoshiwara, 2000; Friedlander y Hershkowitz, 1997; Huntley, 2000;Latterell, 2003; Swafford y Langrall, 2000), por lo que autores como Lian (2012) proponen sustituir la cuestión anterior de cuál es la habilidad necesaria para resolver problemas algebraicos por la de "qué tipo de procesos demuestran que el adolescente tiene la habilidad de resolver problemas algebraicos", siendo los procesos que llevaría a cabo los siguientes (Friedlander y Hershkowitz, 1997; Swafford y Langrall, 2000):

1) En primer lugar, frente a un problema, el adolescente debería ser capaz de darse cuenta e *identificar cuál es el patrón del mismo*, así como recabar los datos numéricos pertinentes (Friedlander y Hershkowitz, 1997).
2) En segundo lugar, el estudiante debería ser *capaz de representar los datos numéricos extraídos del enunciado en una tabla* – una forma muy común de representación algebraica- en la cual se puede fácilmente apreciar dos cantidades relacionadas – la variable independiente y la variable dependiente- (Friedlander y Hershkowitz, 1997; Herbert y Brown, 1997; y Kaput, 1989).
3) En tercer lugar, *el estudiante debe saber generalizar la relación dada en la situación - contexto- del problema*, de una forma simbólica, y haciendo uso de una ecuación algebraica (Swafford y Langrall, 2000; Friedlander y Hershkowitz, 1997).

4) Y, en cuarto lugar, *los estudiantes deben saber hacer una comprobación de la conjetura o asunción que hubieran realizado sobre el problema, aplicando la regla elaborada en una situación nueva similar* a la del problema resuelto; lo cual es una forma de razonamiento deductivo que determinaría la consecuencia válida que seguiría a dicha conjetura, y además, permitiría la manipulación algebraica, no de forma procedimental, sino como parte de una habilidad cognitiva superior de resolución de problemas algebraicos (English y Warren, 1995).

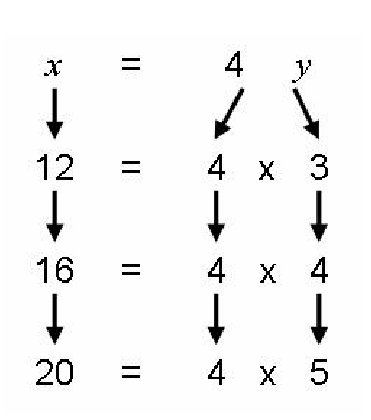
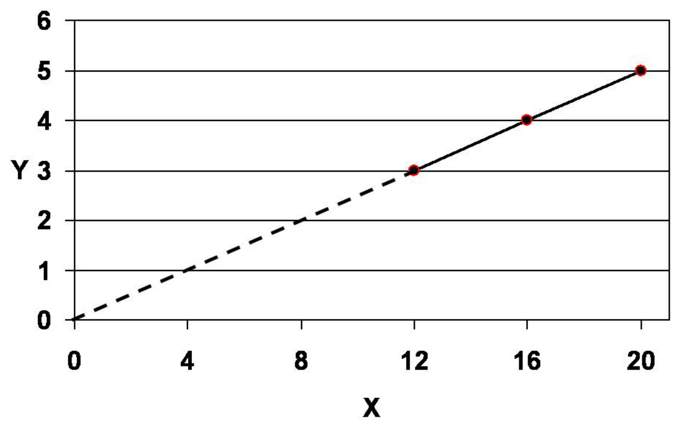
En concreto, para el primer tramo de Secundaria, los procesos cognitivos algebraicos que el adolescente debería activar para resolver problemas algebraicos, serían los siguientes (Smith y Philips, 2000): a) saber identificar las cantidades que varían en el contexto de un problema y describir las cantidades que están relacionadas; b) describir las cuantías de cambio de la relación entre cantidades que estén representadas en tablas, gráficos o expresiones simbólicas; y c) comprender la equivalencia de expresiones algebraicas de varias formas.

Teniendo en cuenta los conocimientos que se acaba de señalar debe poseer un estudiante un estudiante de secundaria, debería dar los siguientes pasos para resolver un problema algebraico:

- En primer lugar, debe leer con detenimiento el enunciado para captar el tipo de estructura del mismo y los datos relevantes.
- En segundo lugar, debe hacerse una representación interna de los datos relevantes de dicho enunciado y de lo que pide el problema.
- En tercer lugar, debe mantener esta representación interna en su memoria a corto plazo el tiempo suficiente como para hacerse un esquema cognitivo adecuado del problema.
- En cuarto lugar, a partir de la identificación del tipo de problema y de los datos relevantes del mismo, debe elaborar una estrategia de resolución de dicho problema.
- Y en quinto lugar, debe aplicar la estrategia, resolver las operaciones y dar la solución final.

En resumen, el adolescente debe hacerse una representación del enunciado del problema después de realizar una lectura comprensiva del mismo, representación que será tanto más eficaz cuantos más conocimientos fácticos –de hechos- tenga en su memoria y cuantas más habilidades lectoras pueda movilizar para interpretar adecuadamente los enunciados. A partir de la misma debe elaborar un mapa cognitivo acorde con ella. Los modelos mentales que suelen hacer los adolescentes sobre los problemas algebraicos suelen ser, sobre todo al principio, modelos mentales analógicos a los aritméticos, similares al que aparece en la parte A de la Figura 1.3 (Alonso Tapia, 2012). El que este sea el tipo de modelo que siga un adolescente para hacer un esquema de un problema algebraico al empezar a resolver problemas de este tipo implica la existencia de una analogía entre las expresiones algebraicas y las expresiones aritméticas. Sin embargo, estas analogías con los problemas aritméticos no son suficientes para entender y resolver los problemas algebraicos, por lo que los estudiantes suelen recurrir a dibujos o gráficos para completar su comprensión del problema algebraico, como el gráfico de la parte B de la Figura 1. 3.

Figura 1.3 Modelo mentales para entender para expresiones Algebraicas

A. Modelos aritméticos	B. Modelos gráficos
	

Como se ha indicado previamente, para resolver un problema algebraico, no es suficiente con que el estudiante se haga una representación y modelo mental en consonancia del problema, sino que debe pensar en una estrategia, aunque sea rudimentaria, de resolución.

A continuación el adolescente debe aplicar dicha estrategia teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, resolver las operaciones y dar la solución final. En todo el proceso, conviene que el adolescente incluya repasos para asegurarse que está avanzando adecuadamente hacia la resolución del problema.

Al proceso seguido para resolver problemas algebraicos se le llama "estrategia de resolución", y es lo que lo que suelen hacer los estudiantes que obtienen mejores resultados en resolución de problemas algebraicos con respecto a los estudiantes que no los tienen y están recogidas en la Figura 1.4. (Alonso Tapia 2012).

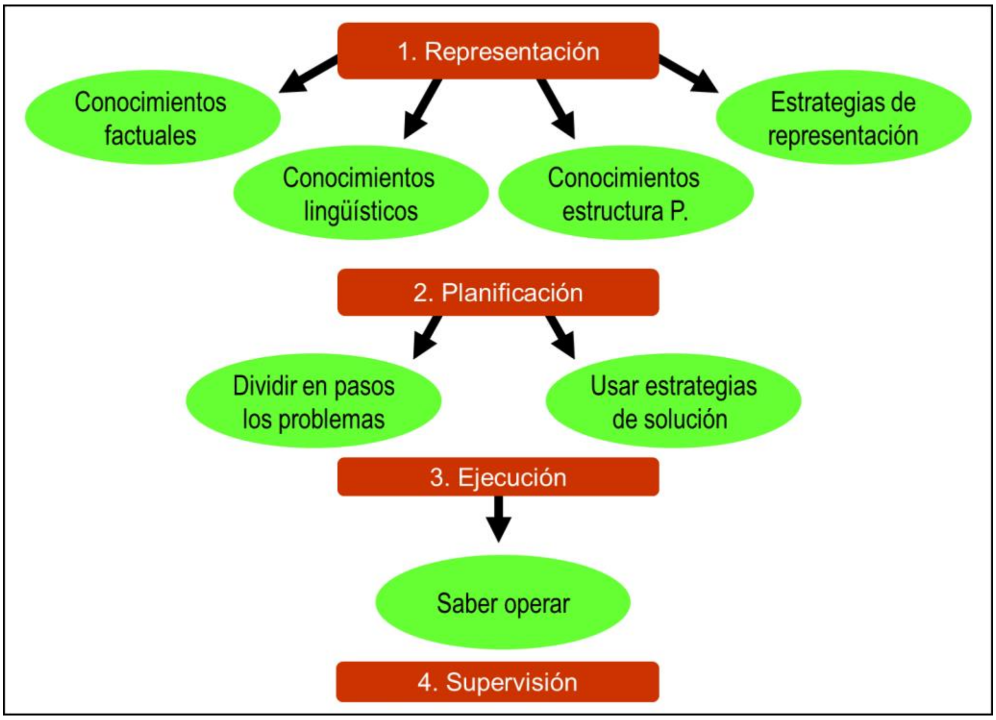


Figura 1.4. Factores de que depende la solución de un problema (Mayer, 1987)

No todos los estudiantes siguen una actuación estratégica al resolver problemas algebraicos, lo que influye de forma negativa en el proceso de resolución – en donde el adolescente tratará de reducir el nivel de abstracción del problema y aplicará procedimientos mecánicos para resolverlo-, como se ilustra en la Tabla 1.2, en donde se hace una comparación entre la actuación de un adolescente que sigue una actuación estratégica frente a otro estudiante que no la sigue. El problema que tienen que resolver es el siguiente:

"*Luis tiene 8 años y su hermano José tiene 5 años. Si el padre de ambos tiene 41 años, ¿cuántos años deben pasar para que la edad del padre sea el doble de la suma de las edades de los dos hermanos?*

Tabla 1.2. Ejemplo de cómo seguir un planteamiento estratégico para resolver un problema algebraico (adaptado de Mayer, 1983)

<table>
<tr><th>Estudiante 1</th><th>Estudiante 2</th></tr>
<tr><td>No sigue un planteamiento estratégico</td><td>Sigue un planteamiento estratégico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Paso 1. Se hace una representación del problema</td></tr>
<tr><td>Identifica y anota los datos relevantes incluidos en el enunciado:
Luis: 8 años
José: 5 años
Padre de ambos: 41 años</td><td>Identifica y anota los datos relevantes incluidos en el enunciado:
Luis: 8 años
José: 5 años
Padre de ambos: 41 años</td></tr>
<tr><td>Interpreta de forma literal los contenidos lingüísticos del enunciado:

Voy a escribir la edad de los dos hermanos y a relacionar ambas con respecto a la edad de su padre:

8 años tiene Luis, 5 años tiene José y el padre 41 años.</td><td>Interpreta los contenidos lingüísticos del enunciado, identificando qué pide el problema:
A ver, ¿qué me pide el problema? Que calcule los años que deben pasar para que la edad del padre sea el doble de la suma de sus dos hijos. Por tanto, esta es la incógnita:
x = años para que la edad del padre sea el doble de la suma de los dos hijos</td></tr>
<tr><td>No identifica el tipo de problema</td><td>Identifica el tipo de problema:
Es un problema de ecuaciones</td></tr>
<tr><td>No se hace una representación del problema (gráfica, tabla, cuadro, etc.).</td><td>Se hace una representación del problema (gráfica, tabla, cuadro, etc.):
Voy a ordenar los datos en el siguiente cuadro:
<table>
<tr><th></th><th>Luis</th><th>José</th><th>Padre</th></tr>
<tr><td>Hoy</td><td>8</td><td>5</td><td>41</td></tr>
<tr><td>En x años</td><td>$8 + x$</td><td>$5 + x$</td><td>$41 + x$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Traduce Algebraicamente de forma directa los datos relevantes:

Como deben pasar x años para que la edad del padre sea el doble de la suma de las edades de los dos hijos, entonces matemáticamente, sería:
$x = (8 + 5) - 41$</td><td>Traduce Algebraicamente los datos relevantes, apoyándose en el cuadro o gráfica realizado:
A partir del cuadro anterior, puedo expresar matemáticamente lo que me pide el problema de la forma siguiente:

$41 + x = 2\ (8 + x + 5 + x)$</td></tr>
</table>

Paso 2. Se hace una planificación para resolver el problema	
No divide en pasos la actuación para resolver el problema.	Divide en pasos la actuación para resolver el problema y aplica dichos pasos: *Así que, para resolver este problema, haré lo siguiente:* *Tengo que saber qué datos me da el problema, que ya los tengo en el cuadro.* *Y tengo que saber qué me pide el problema, que ya lo he anotado.* *Y también tengo que relacionar todos los datos, que también lo tengo.* *Así que me queda resolver la ecuación y dar la solución.*
Paso 3. Ejecuta el plan que ha elaborado previamente	
Sabe hacer las operaciones necesarias para resolver la ecuación, aunque no comprueba la solución final: *Ahora, basándome en la expresión Algebraica anterior, despejo la incógnita y ya debería obtener la solución*.	Sabe hacer las operaciones necesarias para resolver la ecuación y luego comprueba la solución final: *Una vez que he relacionado de forma matemática todos los datos, voy a resolver la ecuación para dar con la solución:* $41 + x = 26 + 4x$ $41 = 26 + 3x$ $15 = 3x$ $x = 15/3$ $x = 5$ *Voy a comprobar si la solución es congruente con el enunciado del problema. Para ello, voy a sustituir el valor de la incógnita en la ecuación inicial y comprobar si la igualdad se cumple. Así:* $41 + 5 = 2 (8 + 5 + 5 + 5)$ *De manera que se comprueba que:* $46 = 2 (23)$ *Luego, la solución es correcta*

En síntesis, las actuaciones que hace un estudiante de tercero de secundaria frente a un problema Algebraico están recogidas en la Figura 1.5. (Alonso-Tapia, 2012; Mayer, 2004a; Montague, 2003).

La idiosincrasia de los problemas algebraicos lleva implícita una serie de dificultades que se convierten en exigencias cognitivas para los estudiantes noveles de Álgebra, dificultades y exigencias que es preciso conocer pues son factores a ene en cuenta a la hora de escoger y organizar la forma de enseñar y entrenar, que es lo que está en el horizonte de esta tesis. Por esta razón, las características de estos problemas, las exigencias que conllevan y las dificultades cognitivas que implican para los adolescentes, se describen a continuación.

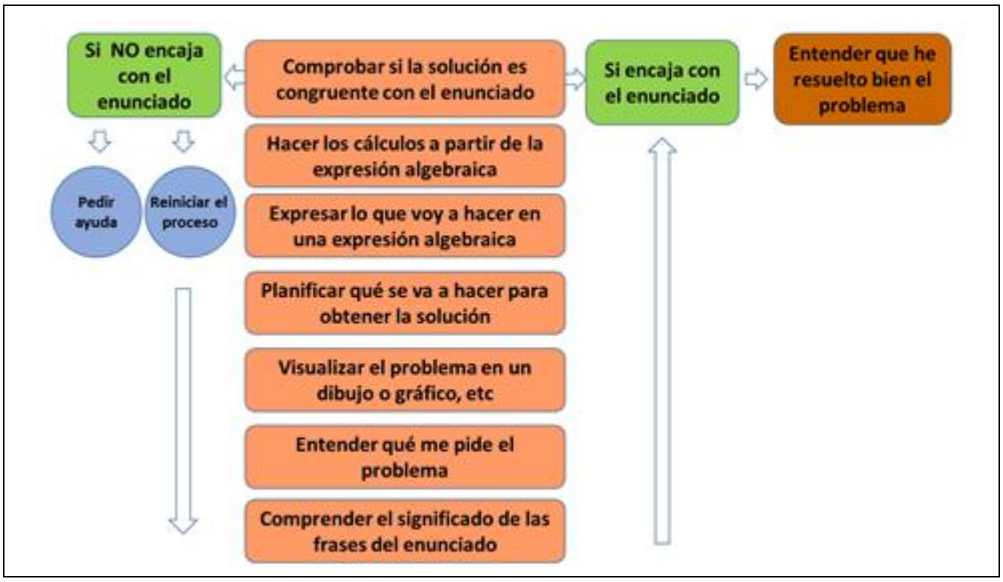


Figura 1.5. Procesos cognitivos que intervienen en la comprensión de un problema algebraico (a partir de Mayer, 2004a y Montague, 2003)

1.5. ¿Con qué dificultades se encuentra un estudiante al resolver un problema algebraico?

Por regla general, suele suceder que si se pide a un estudiante que verbalice qué ha hecho para resolver un problema, éste suele ser capaz de verbalizar y explicar los pasos que ha dado para resolverlo, ya que suele ser fácil tomar conciencia de los procedimientos que se han aplicado- se llama tener un buen nivel de “conceptos operacionales o de proceso” (Stard, 1991; Dubinsky, 1991; Dubinsky y Mac Donald, 1991, p.3). Sin embargo, esto parece no guardar necesariamente una relación con la comprensión conceptual –“comprensión relacional” (Skemp, 1976, p.21)- de dicho problema (Herscovics, 1996; Herscovics y Linchevski, 1994; Hiebert, 1988; Hiebert y

Carpenter, 1992; Kieran, 1989, 1990; Kieran y Chalouh, 1993; Langrall y Swafford, 1997).

Hay muchos trabajos y revisiones realizadas para identificar cuál es la causa de las dificultades que tienen los estudiantes de Secundaria a la hora de resolver problemas algebraicos y cuáles pueden ser los factores que las pueden causar (Alonso Tapia, 2012). La investigación consultada pone el énfasis en dos tipos de causas (Tabla 1.3):

Tabla 1.3. Dificultades de los estudiantes para resolver problemas algebraicos

Dificultades debidas a *causas internas al propio estudiante*

- Lectura inadecuada del enunciado del problema
- Errores de cálculo al equivocarse en elegir la operación u operaciones a realizar.
- Déficits en el lenguaje que produce dificultades al comprender el enunciado.
- Dificultades para *darse cuenta* de lo que están haciendo cuando están resolviendo un problema algebraico.
- Dificultades para *identificar, monitorizar y coordinar* la secuencia de los pasos necesarios para resolver el problema.
- Dificultades para planificar una estrategia de resolución.
- Como consecuencia de lo anterior, nivel de ejecución inferior al de su edad cronológica.

Dificultades debidas a *causas externas al propio estudiante*, tales como las características de los problemas algebraicos:

- Necesidad de adquirir el conjunto de significados de los contenidos que puede haber en un enunciado.
- Necesidad de entender que el valor de los dos miembros de una ecuación a ambos lados del signo igual, es el mismo.
- Necesidad de comprender el significado de lo que es una incógnita.
- Necesidad de entender el *cambio en un grupo de "convenciones" algebraicas.*
- Necesidad de *reconocer y hacer uso de la "estructura" algebraica*.
- Comprender el *significado de la concatenación de los números algebraicos.*
- Necesidad de comprender en qué consiste una *expresión simbólica algebraica.*
- Necesidad de comprender que *la solución que se dé a un problema algebraico siempre ha de ser generalizable.*
- Dificultades al encontrarse con expresiones y ecuaciones algebraicas, con profesores y determinados métodos de enseñanza.
- Y dificultades en la comprensión de las *características estructurales algebraicas.*

a) O bien atribuye las dificultades a *causas internas* al propio estudiante, es decir, a características personales tales como dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas (Fuchs, 2005; Swanson y Jerman, 2006; Shin y Pedrotty, 2015) o a problemas en la capacidad lectora.
b) O bien atribuye las dificultades a *causas externas* al estudiante, en este caso, inherentes a la propia naturaleza del Álgebra, y que implica que sus problemas suelan ser complejos y difíciles de resolver.

En relación *a las características internas al propio estudiante*, estarían aquellos con dificultades específicas con las matemáticas (DM) surgidas en Primaria y que persisten en Secundaria (Cawley y Miller, 1989; Miller y Mercer, 1997) relacionadas con la comprensión y aplicación de los contenidos matemáticos y con la identificación de la información relevante en un enunciado dado (Miller y Mercer, 1997). Las características a que nos referimos, de acuerdo con los trabajos revisados, son las siguientes.

a) Suelen leer de forma inadecuada el enunciado del problema, por lo que les cuesta identificar la información relevante del mismo y organizarla para darle un sentido (Babbit y Miller, 1996).
b) A la hora de averiguar qué operación o ecuación deben aplicar para resolver el problema, se suelen equivocar, así como cometer errores de cálculo al resolver la ecuación planteada.
c) Cuando deben comprender los problemas – sobre todo los enunciados en palabras en vez de con números - les resulta muy difícil. También les resulta difícil activar los recuerdos relativos a los contenidos relevantes del enunciado y planificar los pasos necesarios para resolver el problema. Esto ocurre porque suelen tener déficits en el lenguaje, que se expresan en dificultades para escuchar, pensar, hablar, leer, escribir, deletrear o hacer cálculos matemáticos.
d) También tienen dificultades para darse cuenta de lo que están haciendo cuando están resolviendo un problema -metacognición-, debido a los problemas que suelen tener para centrar la atención, o activar la memoria (Miles y Forcht, 1995).
e) Debido a la dificultad de darse cuenta de lo que están haciendo, también tienen dificultades para identificar, monitorizar y coordinar la secuencia de los pasos

necesarios para resolver el problema -autorregulación- (Miller y Mercer, 1997; Gagnon y Maccini, 2001, 2007; Geary, 2004).

f) Además, cuando deben elaborar una estrategia - planificarla- para resolver el problema, también les es difícil.

g) Y, por último, como resultado de las dificultades anteriores, su nivel de ejecución suele ser inferior a su edad cronológica. Un adolescente con LD, suele tener un nivel de ejecución con los problemas enunciados en palabras correspondiente a un estudiante de 5º de primaria; esto es, un estudiante de unos 17 años, funcionaría con un nivel matemático de un niño con 10 años sin ningún tipo de discapacidad (Cawley y Miller, 1989).

Y, en relación con las *características de los problemas algebraicos* de tercero de secundaria que los hacen difíciles de resolver por los adolescentes, los trabajos consultados indican las características siguientes:

1) Es difícil para un adolescente adquirir el conjunto de *significados de los contenidos semánticos* que puede haber en un enunciado algebraico. El motivo principal es porque no son contenidos procedimentales como en los problemas aritméticos –algunos de los cuales era suficiente con memorizar para hallar la solución al problema-, sino que en álgebra se trata de contenidos semánticos complejos tales como variable, estado algebraico, transformación entre estados, restricciones, etc. (Kieran, 1990).
2) Uno de los aspectos que hay que entender en los problemas algebraicos, es el *valor de los dos miembros que están a ambos lados del signo igual en una ecuación.* En aritmética, al ser expresiones tautológicas, el valor de dichos miembros es inmutable, fijo, salvo excepciones; sin embargo, en álgebra el valor de/los miembro/s de un lado de la igualdad, está condicionado por el valor de/los miembro/s al otro lado de dicha igualdad. Esto implica que el valor total de la ecuación cambia en función de los valores que adquieran dichas incógnitas (Matz, 1982 y Vergnaud, 1984). Por ejemplo, en Aritmética elemental, la igualdad: *"$3 \cdot 4 = 12$"* es tautológica porque el resultado de la misma está establecido previamente en la tabla de multiplicar tanto del *3* como del *4*. Sin embargo, en Álgebra elemental, la igualdad: *"$3x = y$"*, implica dos estamentos diferentes, por

lo que no da siempre el mismo resultado, dependiendo el valor de *x* del valor que adopte *y*, y viceversa.

3) En tercer lugar, otra fuente de dificultad inherente a los problemas algebraicos para tercero de secundaria, es la necesidad de *comprender el significado de lo que es una incógnita*, teniendo en cuenta que en álgebra siempre se produce una "asignación aleatoria de letras" para designar dichas incógnitas. Esto quiere decir que las letras se usan para designar las incógnitas en álgebra, y no están previamente asociadas a ningún número o significado en concreto, sino que se les asigna el valor que sea en función de los datos a tener en cuenta en el enunciado del problema y después de resolver las operaciones de las ecuaciones elaboradas por el estudiante para resolver dicho problema. A esto se le llama en álgebra que *una letra funcione como una variable* e implica que es una letra que se define por su relación con otros términos de la expresión algebraica elaborada por el estudiante (Kuchemann, 1981).

Los estadios por los que pasaría un adolescente en su asimilación del concepto de letra, serían los siguientes (Kuchemann, 1981, p. 104): a) evaluación de la letra; b) letra no usada; c) letra usada como objeto; d) letra usada como valor específico desconocido; e) letra como un número generalizado; y f) letra usada como variable. Por lo tanto, un estudiante empezaría evitando operar con valores desconocidos, continúa asignando un valor numérico a dicho valor, y finaliza en un último estadio, en donde percibirían la letra como representativa de un rango de valores inespecíficos, comprendiendo que hay una relación entre dichos grupos de valores.

Y habría tres usos comunes de las letras en Álgebra (Ntsohi, 2013): a) letra como un valor específico desconocido, cuando se encuentran en ecuaciones tales como "x + 2 = 5", "2x + 3 = 2", etc., siendo el valor de "x" un número específico que puede ser determinado; b) letra como un número general cuando se usa como un elemento generalizador, considerado como que representa o al menos, puede adoptar, varios valores más que sólo uno. Así, la letra se usaría en declaraciones que son ciertas para todos los números, por ejemplo en "a + b = b + a"; y, por último c) letra como variable, cuando se usa para representar un rango de valores inespecíficos, usualmente en relaciones funcionales en donde el cambio en una variable, determina el cambio en la otra. Por ejemplo, "y = 2x+5", "C = 2Π r", etc.

Por lo tanto, entre otros aspectos, una falta de comprensión de las letras en Álgebra, dificultaría a los estudiantes sus habilidades para generalizar situaciones y expresarlas de forma algebraica (Ntsohi, 2005, p. 90).

La no asimilación por parte del adolescente de estos conceptos de incógnita y de letra en Álgebra, podría afectar a su comprensión del enunciado del problema, dando lugar a errores como por ejemplo hacer una asociación automática de la expresión *"8k"* con 8 kilómetros o con 8 kilos.

4) En cuarto lugar, al adolescente le resulta difícil entender *el cambio de un grupo de "convenciones" algebraicas*, las cuales ya no son las que había venido usando en aritmética. Así, según Ntsohi (2013), algunos de los problemas de los estudiantes con el álgebra, se originarían debido a conflictos entre el lenguaje aritmético y el lenguaje técnico algebraico (Carpenter y col, 2003, p.2). Así, mientras en aritmética esta expresión "3+ 1/3 = 3. 1/3", en álgebra ocurre que "a + b # ab". Y además, en álgebra es verdadero que "pq = qp", pero en aritmética "42 # 24".
5) En quinto lugar, al estudiante novel *le resulta difícil reconocer y hacer uso de la "estructura" algebraica.* Así, parece que una estructura algebraica podría ser tanto superficial, como sistemática (Kieran, 1992). En el primer caso, se trataría del acuerdo con respecto a diferentes términos y operaciones que se usan para construir una expresión algebraica o aritmética; y, en el segundo caso, serían las propiedades de operaciones que se dan en una expresión algebraica, así como las relaciones entre los términos de una expresión que viene a partir del sistema matemático (Nickson, 2000). Por lo tanto, la "estructura de una ecuación" incorporaría tanto la estructura sistémica, como la relación de igualdad (Nickson, 2000, p.11).

Las entidades matemáticas que producirían confusión, serían aquellas que impliquen simplificar expresiones o resolver ecuaciones; por lo que, frente a un problema cuya solución fuera una expresión, los alumnos optarían por dar una solución numérica. Así, por ejemplo, la solución "2x+4" se simplificaría a "6" o a "6x" (Ntsohi, 2005, p. 55).

6) En sexto lugar, otra fuente de dificultades viene de la necesidad de asimilar el *significado de la concatenación de números algebraicos*, por oposición a lo que significa la concatenación de números aritméticos. En Aritmética, los números concatenados implican suma, pero en Álgebra, implican multiplicación. Esto supone que un adolescente no debería interpretar que una expresión como *"7x"* quiere decir *"7 + x"*, sino que lleva implícita una multiplicación. Sin embargo, parece ser bastante común cometer errores similares, tales como suponer que si "94" es "90 + 4" -correcto-, entonces "7x" será "7 + x"-incorrecto-.

7) En séptimo lugar, otra posible fuente de dificultad para comprender enunciados algebraicos, es la falta de asimilación y comprensión de lo que significa una *expresión simbólica algebraica*. Éstas, son expresiones que se consideran dentro del Álgebra como entidades "válidas" por sí mismas y que, por lo tanto, no es necesario "resolverlas" para hallar la solución del problema. Así, un resultado como "3x" puede ser perfectamente viable para resolver un problema algebraico, aunque los adolescentes tiendan a suponer que se trata de una solución a la que le falta "cierre" "y que, por tanto, es necesario "resolver la incógnita" para dar con la solución correcta (Collis, 1974). Este error, le llevaría a seguir resolviendo las incógnitas que vaya encontrando hasta dar un resultado numérico final –no siempre correcto- a dicho problema.

8) En octavo lugar, otra fuente de dificultades vendría de la necesidad de comprender que *la solución que se dé a un problema algebraico siempre ha de ser generalizable, es decir*, aplicable a problemas nuevos de la misma tipología que problemas algebraicos ya resueltos. Así, en un problema aritmético cada solución es única para cada problema, ya que suele ser el resultado de aplicar una operación aritmética. Sin embargo, la solución de un problema algebraico se debe siempre poder aplicar a problemas algebraicos similares. Por ejemplo, en el problema aritmético: *"¿Cual el resultado de 3 + 4 multiplicado por 7?"*, el resultado *49*, sólo sirve para ese problema en concreto y no para otro problema aritmético similar como puede ser: *"Si yo sumo 4 a un número y lo multiplico por*

8, ¿qué esquema debería aplicar para saber cuál es ese número? En este caso, la solución: "(4 + x) 8". Sin embargo, el resultado del problema algebraico: "*¿Cuál es el área de un cuadrado de lado "m"?*", que es "*A=m²"*, también sirve para el problema algebraico similar de: "*¿Cuál es el área de un cuadrado de lado "n"?*", siendo la solución: "*A=n²"*.

9) Y, en noveno lugar, otras *fuentes de dificultad* para comprender el álgebra aparecen al encontrarse los alumnos con los siguientes factores *al resolver problemas algebraicos* (Berger y Wilde, 1987; MacGregor, 1990; Kieran, 1992; English y Halford, 1995, p. 241):

a) Tener que formular expresiones y ecuaciones algebraicas desde el lenguaje ordinario (Ntsohi 2005, p. 3). Este es un problema que seguiría ocurriendo en la actualidad, aunque identificado hace tiempo (Berger y Wilde, 1987, p. 23; MacGregor, 1990; Kieran, 1992; English y Halford, 1995, p. 241; Setati y Adler, 2001, p. 247; Ntsohi, 2005, p.33).

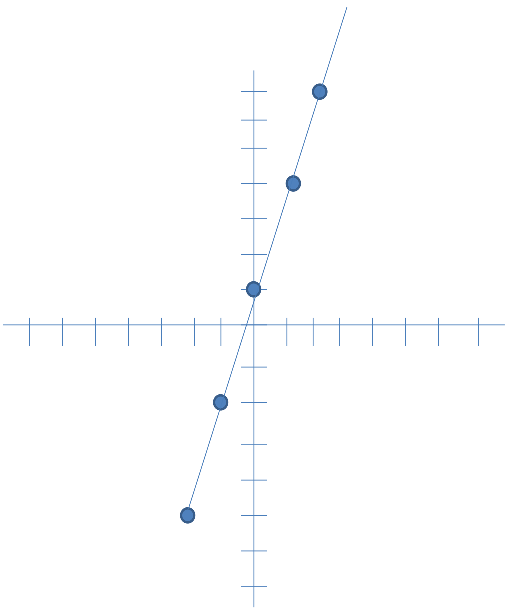
b) Encontrarse con profesores que aplican *métodos de enseñanza* del álgebra inadecuados, en lo cual influirían las creencias de los profesores con respecto a su propio trabajo y a las dificultades que tienen los estudiantes con la comprensión de este tipo de contenidos (Nathan y Koedinger, 2000, p. 210). Existiendo bastantes profesores que continuarían adoptando una perspectiva formal, desde la cual la enseñanza consistiría en trabajar con los estudiantes en gran medida con contenidos de procedimientos y reglas de resolución de problemas (Ntsohi, 2005, p. 90). Incluso, autores como Rakes (2010), señalarían que dichos métodos educativos podrían ser promotores no intencionados de la formación de barreras cognitivas en los adolescentes cuando deben aprender contenidos algebraicos, sobre todo porque ello les podría llevar a adoptar enfoques inadecuados (Sfard, 1991), tal como, por ejemplo, partir de la premisa de que el fenómeno central de aprendizaje llamado "insight"- comprensión de un contenido en relación a otras estructuras-, no necesita de esfuerzo o trabajo, sino que se consigue de forma espontánea o como recompensa automática -o inmediata- en respuesta a los intentos por comprender el contenido dado. Y que por lo tanto, no hace falta invertir esfuerzo en los nuevos aprendizajes, ni es necesario conectarlo con contenidos ya conocidos.

Para tratar de paliar esta situación, autores como Kieran (1992) – a partir del trabajo de Sfard (1991)-, sugieren que al elaborar el método de enseñanza, habría que invertir una gran cantidad de tiempo en "conectar" los nuevos contenidos algebraicos con los contenidos aritméticos ya conocidos, si bien poniendo especial cuidado en definir estos nuevos conceptos algebraicos de la forma más precisa posible porque existe el riesgo de que no se comprendan bien. Así por ejemplo, para explicar el concepto de "funciones lineales", es útil apoyarse en una tabla de valores, la cual se puede plasmar en un gráfico explicativo de la ecuación dada, pero la definición final que se dé al adolescente debería ser más elaborada. Así, por ejemplo, para explicar el problema: "Haz el gráfico de la siguiente ecuación: y = 3x + 1", se pueden seguir los pasos siguientes:

Paso 1. Construir una tabla de valores:

X	-2	-1	0	1	2
Y	-5	-2	1	4	7

Paso 2. Representar los puntos en los ejes de coordenadas. Todos ellos están en una línea.



Paso 3. Conectar los puntos con una línea.

Esta demostración serviría como ejemplo de en qué consiste una función como "*y: 3x + 1*", y no como una definición de función lineal. Sin embargo, en la mayoría de libros de texto, se suele indicar que "s" es una función lineal porque se puede escribir de la forma: "*y – mx + b*", donde "*m*" y "*b*" son constantes. Y que el gráfico de una función lineal es una línea, ya que, cambiando los valores de "*y*" como "*f (x)*", se puede escribir: "*y = mx + b*", haciendo uso de una notación de funciones (Texto extraído de un libro de texto para funciones lineales de Larson, Boswell, Kanold, y Stiff, 2010, p. 75).

Lo anterior implicaría según investigadores como Rakes (2010), el siguiente doble problema: a) por un lado, afirmar que "si una función se puede escribir como una ecuación del tipo pendiente/intersección de una recta, entonces es una función lineal", podría implicar que el adolescente asumiera ésta como la única definición aceptable de función lineal; y que por lo tanto, dejara fuera del concepto a formas alternativas de funciones lineales tales como la forma estándar, o la forma con pendiente; y b) por el otro, esta definición mezclaría el concepto de "notación de función" – una forma general destinada a todas las funciones y no sólo a la lineal- y el concepto de funciones lineales (Chang, 2002), por lo que podría llevar al adolescente a suponer erróneamente que todas las funciones son lineales (Chang, 2002; Kalchman y Koedinger, 2005).

c) Encontrarse con profesores que no relacionan al enseñar las experiencias previas de los estudiantes con los contenidos a aprender. Esto no facilita la transición desde los valores que los estudiantes conocen, hasta los valores desconocidos, y crearía "brechas cognitivas" entre la aritmética y el álgebra (Linchevski y Herscovics, 1996, pp. 40-41).

d) Encontrarse con profesores que no llevan a cabo discusiones adecuadas -dirigidas- en clase también es una forma errónea de enseñar las Matemáticas que puede inducir al error, tanto por exceso de consumo de tiempo, como porque causaría confusión en los estudiantes más lentos, aunque según los trabajos, el que los adolescentes puedan participar exponiendo sus ideas, les permitiría hacer uso de métodos propios de resolución de problemas, y les motivaría (Ntsohi, 2005, p. 90).

e) Otra fuente de dificultad deriva de la variable "género". Chicos y chicas construyen su conocimiento de las Matemáticas de forma diferente (Fennema y Sherman, 1977) y así, van adquiriendo diferentes actitudes hacia las Matemáticas (Sherman y Fennema, 1978). A pesar de los cambios moderados que ha habido a lo largo del tiempo, sigue existiendo una falta de igualdad en cuanto a géneros (Carrell, Page, y West, 2009; Fennema, 2000; Mendick, 2008; Van Langen, Rekers-Mombarg, y Dekkers, 2008; Wei y Hendrix, 2009; Zohar y Gershikov, 2008).

La no comprensión de los aspectos estructurales indicados, daría lugar a una dificultad para asimilar los contenidos algebraicos. Así, por ejemplo, para que un estudiante entienda una expresión tal como "a + b", debe ser capaz de trabajar con la naturaleza abstracta de tales símbolos, reconocer que dicha expresión ("a + b") representa el número total de ítems de un grupo de ítems de "a" y de "b". Y todo, ello, explicado desde el lenguaje algebraico – es decir, desde la expresión dada "a + b"-, sin necesidad de recurrir a otro tipo de lenguaje – simbólico, gráfico, lingüístico, etc- de menor complejidad (Kieran, 1992).

1.6. Exigencias cognitivas de los problemas algebraicos

Las características definitorias de los problemas algebraicos y las derivadas de su enseñanza – ambos definidos en el apartado anterior-, suponen una serie de *exigencias cognitivas* para los estudiantes de tercero de secundaria que se presentan cuando dichos estudiantes deben resolver este tipo de problemas (Alonso-Tapia, 2012; English, 2008; y Rakes, 2010). Dado que es preciso tener en cuenta tales exigencias a la hora de la enseñanza del álgebra, se presentan en la Tabla 1.4 y se explican a continuación.

1) Es necesario que el estudiante disponga de conocimientos previos suficientes y bien articulados, sobre todo de tipo aritmético, que sirvan como base para comprender y asimilar los nuevos contenidos algebraicos. A partir de esta base teórica aritmética, se trata de que el adolescente sea capaz de asimilar contenidos tales como en qué consiste la trasposición de términos al resolver una ecuación, el concepto de variable, o el mismo concepto de ecuación algebraica (Kuchemann, 1981).

Tabla 1.4. *Exigencias cognitivas* de los problemas algebraicos para los estudiantes de secundaria

- Se necesita que los estudiantes dispongan de conocimientos previos suficientes y bien articulados, sobre todo, de tipo aritmético.
- Que comprendan las características estructurales de los problemas algebraicos.
- Que el adolescente sepa interpretar y comprender las relaciones matemáticas entre los elementos del enunciado del problema.
- Que el estudiante disponga de un esquema cognitivo – o representación mental- lo más fiable y autónoma de la parte significativa del enunciado del problema.
- Se exige que el adolescente disponga de buena memoria comprensiva y de trabajo.
- Se exige que el estudiante sepa adoptar un planteamiento estratégico e individual para resolver el problema.
- El estudiante debe "darse cuenta" de lo que está haciendo cuando está resolviendo problemas algebraicos.
- Es necesario que el estudiante adopte las creencias y actitudes adecuadas.
- Es preciso que desarrolle habilidades cognitivas de nivel superior
- Que asimilen un lenguaje de símbolos matemáticos.
- Que los métodos usados no provoquen barreras cognitivas en los estudiantes.
- Y por último, parece influir la variable género.

Si los conocimientos previos de los que dispone el adolescente no son suficientes, esto supondría una fuente de problemas para comprender los nuevos contenidos algebraicos que debe asimilar (Alonso-Tapia, 2012). A este respecto, hay trabajos que fundamentan esta necesidad de apoyar los aprendizajes algebraicos en los aritméticos (Filloy y Rojano, 1984; Hewitt, 1998; Arzarello, 1992; Herscovics y Linchevski, 1994; Bednarz y Janvier, 1996; Radford, 1996; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Malara y Navarra, 2003; Ortega, 2005; Kieran y Drijvers, 2006; Willers, 2012).

2) Es necesario también *que los estudiantes comprendan las características estructurales de los problemas algebraicos* (Kieran, 1992; Howe, 2005; Carraher y Schliemann, 2007), comprensión que evitaría problemas como los siguientes

a) Intentar la mayoría de las veces, convertir sin una reflexión previa, una expresión algebraica en una ecuación con el fin de elaborar una representación que incluya un resultado.

b) Cometer errores no sistemáticos y estratégicos cuando están simplificando expresiones algebraicas.

c) Tener una gran resistencia a operar con una ecuación como si fuera un "objeto", y operar con ella como si fuera un "proceso", es decir, aplicando procedimientos pero sin seguir un razonamiento adecuado al problema.

d) No tratar al signo de igual como un símbolo de simetría, con el olvido consiguiente de aspectos tales como que hay que hacer siempre las mismas operaciones a ambos lados de dicho símbolo.

e) Tener dificultades para identificar la estructura "oculta" en una ecuación, limitándose a aplicar procedimientos de resolución sin llevar a cabo las reflexiones previas necesarias.

f) Y, por último, no hacer uso del álgebra como un instrumento que les permita comprobar relaciones numéricas (Kieran, 1992, p. 412).

3) Se precisa que el adolescente sepa interpretar y comprender cuáles son las relaciones matemáticas que hay entre los elementos del enunciado de un problema algebraico (Chaiklin, 1989 y Kieran, 1992), y que sepa cómo incluir y articular esas relaciones en una ecuación algebraica que sirva para resolver el problema.

4) Es también un requisito fundamental que el adolescente disponga de un esquema cognitivo – o representación mental- lo más fiable y autónoma posible de la parte significativa del enunciado del problema algebraico, así como de la incógnita -valor- que debe averiguar para resolver dicho problema (Mc Gregor y Stacey, 1993). El tipo de esquema a elaborar no sólo ha de ser fiable – es decir, reflejar los elementos, datos y hechos relevantes de dicho enunciado-, sino que también ha de ser lo más autónomo posible – es decir, debe ser el resultado de un razonamiento previo, en el cual se haya incluido previamente un planteamiento adecuado de la incógnita o valor a averiguar-. Todo esto encaja con la exigencia cognitiva que lleva implícito cualquier problema algebraico de que el adolescente debe pensar más en términos estratégicos – elaborar un esquema individual y adaptado a cada problema-, que en términos de aplicar una ecuación algebraica para averiguar el valor de la/s incógnita/s, llevando a cabo las operaciones necesarias para ello (Kieran, 1990).

5) Otros requisitos cognitivos necesarios para la comprensión de los problemas algebraicos, están relacionados con la memoria del adolescente, en cuanto a organizar la información relevante del enunciado - memoria de trabajo-, extraer la información relevante del enunciado para elaborar un proceso individual para llegar a la solución – memoria a largo plazo (Geary, 2004; Miller y Mercer, 1997); y operar adecuadamente con las ecuaciones a las que ha llegado en su proceso de solución - memoria a largo plazo- (Swanson y Jerman, 2006).

6) La propia naturaleza de un problema algebraico lleva implícita la necesidad de que un adolescente sepa adoptar un planteamiento estratégico e individual para resolverlo (Montague y Applegate, 2000), ya que son enunciados que incluyen contenidos - dimensiones- de distinto tipo, lo que implica que el estudiante sepa identificar y averiguar incógnitas – que pueden ser fijas o variables-, y elaborar por sí mismo y resolver ecuaciones que incluyen una o varias incógnitas. Así, se trata de situaciones que no admiten un planteamiento directo - como era plausible en los problemas aritméticos en donde era suficiente con aplicar una fórmula y operar con ella hasta dar con la solución-; sino que es necesario que el adolescente tenga la capacidad de plantearse qué metas alcanzar, por medio de qué pasos y cuyo alcance le servirá como indicador de su avance en el proceso de solución y de cuándo ha llegado a la solución final (Harnisfhfeger y Bjorklund, 1990, p.1). Para llegar a adquirir esta capacidad estratégica, es necesario que el adolescente sea capaz de comprender de la forma más exacta posible, el enunciado de un problema algebraico; integrar los elementos relevantes del enunciado en un todo significativo – como puede ser un esquema o mapa cognitivo-; elaborar una ecuación en donde estén relacionadas las incógnitas a averiguar; y resolver, aplicando las operaciones adecuadas, el problema.

7) Otra exigencia cognitiva que lleva implícita la resolución de problemas algebraicos para un adolescente, es que sepa “darse cuenta” de lo que está haciendo cuando está resolviendo este tipo de problemas; así como de los errores que pudiera estar cometiendo, con el fin de corregirlos al momento, y evitar un posible efecto acumulativo negativo, que pudiera dar como resultado una solución final incorrecta. Dentro de ese darse cuenta de lo que hace, está la necesidad de que el estudiante haga una evaluación de la solución final que dé al problema, de una doble forma: a) por un

lado, comprobando si dicha solución tiene sentido en el contexto del problema; y b) por el otro, valorando si dicha solución puede ser generalizable a otros problemas algebraicos del mismo tipo que el problema que acaba de resolver.

Para darse cuenta de lo que hace cuando está resolviendo el problema dado, el estudiante tiene que haber adquirido los siguientes procesos cognitivos:

a) Ser capaz de ejercer un control de dicho proceso de resolución, al tiempo que resuelve el problema (Campione y col, 1989; Lester, 1989; Paris y Winograd, 1990; Schoenfeld, 1987; 1992).

b) Saber evaluar de la forma más objetiva posible, todas las actuaciones que está haciendo para resolver dicho problema.

c) Organizar todos los recursos cognitivos que está poniendo en práctica para – y mientras- está resolviendo el problema (Campio y col, 1989; English, 1992a, 1992c; Flavell, 1979; Lawson, 1990; y Peterson, 1988).

d) Y cuarto, adoptar una actitud positiva adecuada a la resolución de dicho problema (Schoenfeld, 1987).

8) También es *necesario que el estudiante adopte creencias y actitudes adecuadas* no sólo con respecto a la resolución en sí de este tipo de problemas (Schoenfeld, 1985a, 1987, 1992; Mc Leod, 1985, 1992; y Mc Leod y Adams, 1989); sino también con respecto a la visión que tiene de sí mismo y de las actuaciones que está haciendo para resolver estos problemas (English, 2008), con el fin de evitar una posible influencia negativa en el proceso de resolución (Schoenfeld, 1987).

Según los trabajos consultados, con respecto a las creencias que debe tener el estudiante, las más adecuadas serían las siguientes:

a) Creencias relativas al hecho en sí de resolver problemas algebraicos. Un recuento de las creencias que afectan a cómo se afronta la solución de problemas algebraicos, creencias al parecer muy extendidas entre los adolescentes, a partir de los trabajos consultados, sería el siguiente:

- “Los problemas algebraicos son muy difíciles de entender para un estudiante “normal” y, por lo tanto, sólo se pueden abordar haciendo uso de métodos y procedimientos memorísticos para resolverlos y no tiene sentido hacer un esfuerzo extra para tratar de comprenderlos" (Lampert, 1990; Schoenfeld, 1982).

- "Los problemas algebraicos son algo cerrado en donde sólo habría una respuesta acertada y una única forma de llegar a ella; así que los problemas resueltos en clase, no servirían para resolver problemas en la vida real" (Carpenter, Lindquist, Mathews y Silver, 1983; Lampert, 1990; y Silver y Marshall, 1990).
- "Cualquier problema se debería resolver en menos de 10 minutos" (Lampert, 1990; y Schoenfeld, 1987).
- "Todo problema nuevo debería encajar en algún modelo que el estudiante ya haya elaborado previamente sobre algún problema conocido" (Silver y Marshall, 1990).

b) Creencias con respecto a uno mismo en relación con la capacidad de resolver problemas algebraicos.

Con respecto a la actitud del adolescente, según una parte de la investigación consultada (Dossey y col, 1988; Foxman, Martiniy Mitchell, 1982), habría una correlación positiva entre la actitud hacia la tarea de resolver problemas algebraicos y los logros académicos; la cual, según los hechos, no siempre se da porque en la percepción del estudiante, influye otro tipo de factores que forman parte del llamado "`proceso de autorregulación". Por medio de este proceso, el estudiante regula lo que está haciendo cuando está resolviendo un problema matemático. Los factores que influirían en dicha percepción – de forma positiva o negativa-, se refieren a diversas capacidades que un adolescente pone en funcionamiento cuando resuelve este tipo de problemas, las cuales son:

- La capacidad de ejercer un control - más o menos intencional- sobre el proceso de resolución del problema.
- La capacidad de evaluar de una forma lo más objetiva posible, lo que está haciendo cuando está resolviendo dicho problema.
- Y la capacidad de organizar los recursos cognitivos que está poniendo en funcionamiento en el proceso de resolución del problema.

Según sean las creencias y actitudes que adopta un estudiante con respecto a la resolución de problemas matemáticos, así será el tipo de afecto que invierte en resolver la tarea (Schoenfeld, 1989; McLeod, 1992), en relación a los siete sub tipos siguientes: confianza, auto-concepto, auto-eficacia, ansiedad, esfuerzo, atribuciones de habilidad, indefensión aprendida y motivación (McLeod, 1992). Por otra parte, también habría una asociación entre un nivel alto de logro matemático y actitudes positivas hacia el aprendizaje matemático (Barkatsas, Kasimatis, y Gialamas, 2009), por lo que, lograr generar esas actitudes positivas en los estudiantes, se relacionarían con confianza para hacer las tareas matemáticas, incluso reduciendo el impacto de la desventaja socio-económica en el logro académico (Ismail, 2009).

Por otra parte, también se ha encontrado una disminución de los niveles de confianza de los estudiantes para resolver problemas matemáticos, conforme van avanzando a cursos más altos (Dossey, Mullis, Lindquist y Chambers, 1988). Una explicación razonable, podría ser una acumulación de experiencias negativas, que llevaría al estudiante a tal grado de dificultad e incomodidad que optara por dar cualquier respuesta – aunque fuera errónea, o del todo irracional- con tal de salir cuanto antes de la situación de resolver el problema (Mc Leod, 1992; Wagner, Rachlin y Jensen, 1984).

Para producir mejoras en la actitud y creencias de los adolescentes con respecto a la tarea de resolver problemas matemáticos, los trabajos consultados sugerirían propiciar experiencias positivas inherentes a dicha tarea, tales como la ya clásica del "¡ajá!"- descubrir un aspecto del problema que mejora sustancialmente la comprensión del mismo- de Mason, Burton y Stacey (1982); o la experiencia de "insight" – el estudiante se da cuenta de las conexiones que hay entre las ideas importantes de un problema- (Lawler, 1981). Son experiencias que fomentarían en los adolescentes la persistencia en la tarea, frente al abandono por falta de entendimiento de los problemas (Peterson, 1988).

9) Resolver problemas algebraicos, también implica para un adolescente la exigencia de ser capaz de *desarrollar habilidades cognitivas de nivel superior* - complejas-, a partir de las cuales ser capaz de reelaborar la parte significativa de un enunciado, imponiéndole una estructura individual - consecuencia del propio razonamiento - en lugar de esperar encontrar el significado y la estructura del enunciado

de forma aparente en dicho enunciado (Resnick, 1987). Esto quiere decir que se pide a los estudiantes que elaboren y se apoyen en un razonamiento abstracto para resolver los problemas (Vogel, 2008), debido a la naturaleza abstracta del Álgebra, que incrementa su dificultad con respecto a la Aritmética (Carraher y Shliemann, 2007; Howe, 2005; Kieran, 1989).

El tipo de habilidades cognitivas superiores que el adolescente necesitaría alcanzar son las siguientes (Splliter, 1988):

- Saber hacer inferencias a partir de la información dada en el problema.
- Saber hacerse las preguntas necesarias para comprender el problema.
- Ser capaz de escucha de forma activa las explicaciones sobre el problema.
- Identificar premisas, hacer predicciones, entender el significado de causa y efecto, elaborar hipótesis y criterios.
- Hacer uso de analogías para resolver los problemas.
- Ser capaz de resolver problemas y dilemas matemáticos.
- Sugerir alternativas y opciones de resolución.
- Y pensar de forma creativa para resolver el problema.

La investigación consultada, indica que desarrollar y aplicar estas habilidades cognitivas mejoraría no sólo la capacidad del adolescente de resolver problemas algebraicos, sino también su capacidad de aplicar los conocimientos adquiridos a otros campos de conocimiento y a problemas de la vida real (Fennema y Peterson, 1985).

10) Por último, otra exigencia sería *que los estudiantes aprendan y asimilen un "lenguaje de símbolos matemáticos"* completamente extraño a lo que están acostumbrados a trabajar en Matemáticas (Kilpatrick y col, 2001). Se trata de un lenguaje tan específico que, a menudo, no clarifica al estudiante novel de Álgebra cuál es el tipo de conexión existente entre los símbolos algebraicos y el significado que tienen asignado (Blanco y Garrote, 2007; Socas Robayna, 1997). En algunos casos, incluso, los estudiantes son totalmente inconscientes de que haya algún tipo de significado asociado a dichos símbolos, por lo que no hacen ningún tipo de adscripción entre símbolo y significado (Küchemann, 1978); mientras que en otros casos, el adolescente sólo alcanzaría a entender esta asignación de forma limitada, con el riesgo consiguiente de hacer asignaciones erróneas entre símbolos y significados (Küchemann,

1978). Debido a esta dificultad, por ejemplo, cuando los adolescentes empiezan con el uso de tópicos tales como las "funciones", suelen elaborar gráficos para interpretar el objeto de "función" con el grupo de datos correspondientes incluidos en dicho gráfico (Leinhardt, Zaslavski y Stein, 1990), pudiendo alcanzar gran fluidez procedimental en resolver este tipo de problemas, pero sin llegar a identificar cuál es el constructo mental a partir del cual se ha construido el gráfico, sobre todo cuando el problema requiere de interpretaciones más abstractas (Skemp, 1976/2006).

Hasta aquí hemos visto qué es lo que los alumnos deberían comprender y saber hacer para resolver problemas algebraicos, las dificultades más frecuentes con las que se encuentran y las exigencias a que deben enfrentarse. Teniendo todos estos factores en cuenta, la pregunta que se plantea es qué forma de entrenamiento podría ayudarles a superar mejor esas dificultades. Por este motivo se revisa a continuación la evidencia sobre los factores instruccionales que favorecen la comprensión y solución de problemas algebraicos. Se espera que esta revisión sugiera qué procesos entrenar y, sobre todo, cómo hacerlo y qué merece la pena investigar en relación con ambas cosas –contenido a entrenar y procedimiento para hacerlo-.

1.7 Factores instruccionales que favorecen la comprensión y resolución de problemas algebraicos

1.7.1 ¿Qué habría que entrenar?

Los trabajos consultados, han sacado una serie de conclusiones sobre el tipo de contenidos que serían más indicados para trabajar la resolución de problemas algebraicos con estudiantes de secundaria; así como qué métodos de entrenamiento serían más idóneos. Estos trabajos, se han realizados desde los tres enfoques siguientes (Confrey, 1990):

1) Estudios piagetianos dentro de la tradición de epistemología genética, los cuales sugirieron que el conocimiento es un proceso y no un estado, y que por ello, debería ser investigado en su desarrollo.
2) Aplicaciones de la filosofía de la ciencia en la tradición de cambio conceptual, que han estudiado los ámbitos tanto de las Matemáticas como de la Ciencia.
3) E investigación en errores sistemáticos, que son los conceptos erróneos que tienen los estudiantes en distintos campos matemáticos – Álgebra, Geometría, o

Números racionales-, y que influyen negativamente en la resolución de los problemas del campo correspondiente (Egodawatte, 2011; Rakes, 2010).

Nos interesan especialmente por su aplicabilidad los trabajos sobre *conceptos matemáticos erróneos*. Las concepciones erróneas se pueden identificar fácilmente porque se traducen en errores procedimentales, y parece que disminuyen en un ambiente de clase que facilite la auto-confianza, la valoración positiva de las matemáticas, la motivación por aprender y una conexión entre los conocimientos procedimental y conceptual (Rakes, 2010). A este respecto, los autores suelen recomendar tener en cuenta las *categorías de conceptos erróneos existentes,* al diseñar el método de enseñanza, tal y como muestra la clasificación que aparece en la Tabla 1.5 (Egodawatte, 2011; Rakes, 2010), conceptos cuyo significado se expone a continuación.

Tabla 1.5. Concepciones erróneas frecuentes que afectan al aprendizaje del álgebra.

- Concepto y significado de variable
- Comprensión del significado de las letras y su lugar en las matemáticas
- Concepto de estructura algebraica
- Concepto de expresión algebraica
- Noción del proceso de objetivación
- Concepto de “Aprendizaje de las Matemáticas”
- Concepto de lo que implica el signo igual (“=”)
- Concepción procedimental de las matemáticas

a) Los conceptos de *“variable”* (Egodawatte, 2011; Ladele, 2013; Rakes, 2010) y *“variabilidad*”, siendo fundamentales para comprender los contenidos algebraicos (Briggs, Demana y Osborne, 1986; Edwars, 2000; Graham y Thomas, 2000), producen muchas dificultades de comprensión en los adolescentes y ha promovido que muchos trabajos se centren en cómo mejorar la comprensión de ambos conceptos (Kieran, 2008).

Muchos estudiantes no asimilan el concepto abstracto de variable – representación interna-, ni su grafía – representación externa- , y tampoco saben cómo identificar la necesaria consistencia de sistema – de variabilidad- que se da en los múltiples usos de dichas variables (Mac Gregor y Stacey ,1997). Ambos conceptos permiten a los estudiantes asimilar que una variable puede adoptar diferentes valores dependiendo del contexto del problema (Ely y Adams, 2012; Usiskin, 1999), y también que la cantidad que representa una letra puede variar o no, y puede ser una sola letra, una combinación de letras y operaciones, o un número abstracto de cosas (Linchevski y Herscovics, 1996; RA, Philipp y Schappelle, 1999; Usiskin, 1999). Por lo tanto, una letra podría representar tanto un valor desconocido ("x+8=19"), como una cantidad variable en una expresión general ("2m+3"), o ser la respuesta final de una operación ("3x+5y"); y un adolescente debe ser capaz de ir más allá para "ver" la letra, no sólo con respecto a su uso como indicador de un valor desconocido, sino también referido a su capacidad para asimilar valores variables (Ely y Adams, 2012).

Uno de los recursos que puede ayudar a un profesor a identificar si un estudiante ha adquirido un concepto matemático es el conocimiento de los estadios por los que debe avanzar hasta llegar a la comprensión final de dicho concepto. En la Tabla 1.6 se exponen las seis fases que atravesaría un adolescente hasta llegar a la comprensión del concepto de variable (Küchemann, 1978, a partir de los sub-estadios de Piaget). Teniendo en cuenta las fases señaladas, limitarse a incluir variables en el contexto de una ecuación puede no ser suficiente para lograr que los estudiantes comprendan el significado de dichas variables (Thorpe, 1989). Además, también habría que prestar especial atención a no dar instrucciones fragmentadas que no muestren una perspectiva general sobre cómo funcionan y lo que son realmente las variables (Thorpe, 1989; Kieran, 1989, 2007), así como no centrar la instrucción sólo en procedimientos, sino también en conceptos y conexiones entre las ideas del enunciado del problema dado (Hiebert y Carpenter, 1992; Hiebert y Grouws, 2007).

b) Los adolescentes suelen tener también dificultades en la *comprensión básica de las letras y su lugar en las Matemáticas* (Chow, 2011), en relación con hechos tales como que una letra puede ser representativa de una cantidad fija o variable, numérica o no numérica, de un sistema de ecuaciones, etc., es decir, que las letras representan cantidades que varían, apareciendo estas dificultades sobre todo cuando las letras no están dentro del contexto de una ecuación que pueda dotarle de significado (Thorpe, 1989). Así, por ejemplo, la expresión "3x + 1" sería incompleta y solo podría tener significado dentro del contexto de una ecuación tal y como:" *f(x)=3x + 1"*, o "*3x + 1 = 0"*, ya que es la ecuación la que le otorga el significado y un contexto a la letra "x", contexto a partir del cual hay que interpretar si dicha letra "x" es una variable o representa una parte de la solución.

Tabla 1.6. *Niveles jerárquicos en la comprensión del concepto de "variable*"

Nivel	Sub escala piagetiana	Descripción	Ejemplo
1	Operaciones concretas	Evaluar la variable haciendo uso del ensayo y error	Aplicar operaciones al azar (+, -, x, :) para hallar el valor de la variable.
2		Ignorar la variable	No se tiene en cuenta la letra.
3		La variable representa un objeto o nivel	Se interpreta la letra como una etiqueta del objeto dado. Pe, para muchos estudiantes "8m+6p" significaría "8 manzanas y 6 peras"(p.5).
4	Operaciones formales	La variable representa un valor desconocido	Se sustituye la representación externa - grafía- de la variable por un valor dado, porque se interpretan las variables como valores desconocidos específicos (Gray y col, 2005, p.4). En el problema del estudio de Gray, Loud y Sokolowski (2005): "Dado un grupo de manzanas pequeñas de 8 céntimos cada una y otro grupo de peras pequeñas, de 6 céntimos cada una; si *a* se usa para designar el número de manzanas compradas y *p* se usa para designar el número de peras compradas, ¿Para qué se presenta *8a* + *6p*?" El 81% de los estudiantes de Álgebra básica, tendían a sustituir el precio de la fruta por las letras y a dar la solución resultante, 100, es decir, que parecían interpretar "a" y "p" como valores desconocidos específicos (Gray y col, 2005, p.4).
5		La variable representa un número generalizado	Considerar que la solución dada a un problema se puede aplicar para resolver problemas nuevos del mismo tipo.
6		La variable representa una relación funcional	A la mayoría de los estudiantes les cuesta considerar que una relación como "4x+7y" pueda ser la solución a un problema

Debido a las dificultades de comprensión del significado de variable, los estudiantes tendrían menos dificultades para identificar el significado de identidades numéricas que comprender lo que son las identidades simbólicas -letras- (Torigoe y Gladding, 2006). Estos autores propusieron dos versiones – una con cantidades numéricas y la otra con símbolos- para resolver el problema siguiente: "Determina la aceleración mínima necesaria para que un policía pueda alcanzar a un ladrón de bancos que huye de la escena del robo", concluyendo que, manteniendo el resto de características constantes, a los estudiantes les resultaba difícil identificar a qué cantidades representaban los símbolos - letras- dados en los problemas. Y además, sugirieron que al igual que se enseña a los estudiantes a hablar en frases, habría que enseñar a los estudiantes de Álgebra a hablar en frases algebraicas, y con letras algebraicas.

Debido a estas dificultades con la comprensión de las letras, los estudiantes suelen cometer los *errores de interpretación* siguientes (Ryan y Williams, 2007):

- Entender que una letra siempre es un nivel – un "proceso"- y nunca un "objeto" (Booth, 1984; Küchemann, 1981; MacGregor Stacey, 1993b; S Wagner, 1999). Por ejemplo, esta situación se llama dilema "proceso-producto", ya que en Álgebra no habría una diferencia clara entre ambos conceptos; por lo tanto, la expresión "a+b" representaría tanto el procedimiento de sumar "a" a "b", como el objeto "a+b", es decir, tomado como una sola cantidad (Davis, 1975).
- Suponer que una letra es una palabra y que, por lo tanto, no se puede usar o ignorar (Küchemann, 1981; Perso, 1993).
- Asumir que una letra tiene un valor fijo en función de cuál es su posición en el alfabeto (MacGregor y Stacey, 1993b; I. Watson, 1980).
- Suponer que una letra independiente- que no está dentro del contexto de una ecuación- tiene un valor fijo de "1" (Perso, 1993; Stacey y MacGregor, 1997).
- Entender que una letra tiene un valor numérico conocido que siempre es fijo o específico (Knuth et al., 2005; Küchemann, 1981).
- Asumir que las letras siempre adoptan los mismos valores cuando están las mismas posiciones en las ecuaciones (Booth, 1984). Por ejemplo, suponer que "12m" siempre debe significar 12 metros, como ocurre en Aritmética; sin embargo, en Álgebra "12m" puede significar "12 veces un número desconocido" (Kieran y col, 1990).
- Y, por último, suponer que diferentes letras nunca pueden tener el mismo valor (Booth, 1984; MacGregor y Stacey, 1993b; Perso, 1993).

Teniendo en cuenta los errores en que se traduce la dificultad para comprender el significado de las letras y su posición, el estudiante debería ir asimilando los conceptos siguientes para comprender el significado de letra algebraica (Philipp, 1999):

- En primer lugar, entender las letras como niveles, como por ejemplo *"f"* e "*y"*, en la expresión "*3f= 1y"*, que representa que 3 pasos equivalen a 1 yarda.
- En segundo lugar, entender las letras como valores constantes, como puede ser "*Π"," e"* o "*c"*.
- En tercer lugar, asimilar las letras como valores desconocidos, como en el ejemplo siguiente en donde "x" representa un valor desconocido en la expresión "*5x – 9 = 11"*.
- En cuarto lugar, comprender las letras como números generalizados, como pueden representar *"a"* y *"b"* en la expresión *"a + b = b + a"*.
- En quinto lugar, entender las letras como cantidades variables, como pueden representar *"x"* e *"y"* en *"y = 9x – 2"*.
- En sexto lugar, asimilar las letras como parámetros, como pueden representar "*m" y "b"* en la expresión *"y = mx + b"*.
- Y, en séptimo lugar, comprender las letras como símbolos abstractos, como pueden representar *"e" y "x"* en "*e*x = x"*.

c) Concepto de "*estructura algebraica*" (Chow, 2011). Los adolescentes tienen asimismo dificultades para comprender el concepto de "estructura algebraica – o estructura multiplicativa- en relación a una "estructura aditiva"- o estructura de suma- (Moss, Beatty, Barking y Shillolo, 2008), por lo que tienden a aplicar estructuras de suma en cualquier problema, incluidos los algebraicos, así como dificultades para manipular las expresiones algebraicas en función de las reglas aceptadas, procedimientos o algoritmos (Egodawatte, 2011). De ahí la necesidad de delimitar con claridad los conceptos algebraicos, aunque se haga uso de la Aritmética para iniciar la enseñanza del Álgebra. Como ejemplo de esta falta de comprensión, autores como Moss (2008) han puesto el ejemplo del problema del tablero trapezoide, en donde se da a los adolescentes un dibujo -que representa gráficamente una serie de supuestos asientos unidos alrededor de mesas- y donde se les da, además, una tabla de valores, como en la Figura 1.6:

Table	Chairs
1	5
2	8
3	11
n	

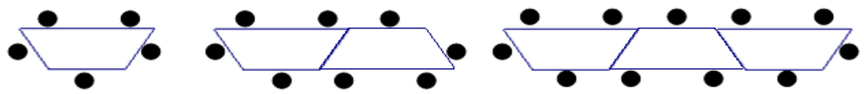


Figura 1.6. Representaciones dadas en el problema del tablero trapezoide (Moss y col, 2008, p. 157)

En este caso, los estudiantes recurrían a un patrón de suma para resolverlo, por ejemplo, sumando repetidamente "3" al valor previo "*y*", es decir, aplicando la expresión " $y_n = y_{n-1} + 3$"; y no a desarrollar una relación multiplicativa entre el número de mesas y el número de sillas, como pudiera ser reconociendo que los tres elementos del tablero, las sillas, las mesas y la relación entre ambas, actúan como una pendiente de cambio -un operando multiplicativo- , en donde se aplica la expresión "$y_n = 3n + 2$"(Warren, 2000). Así, aunque el patrón aditivo no sería del todo incorrecto ya que puede ayudar a dar con la solución, en realidad no describe de forma exacta la relación entre "*x*" e "*y*", por lo que el adolescente no asimilará los conceptos necesarios como para generalizar la respuesta dada a la resolución de problemas similares nuevos más complejos (Warren, 2000).

Otra fuente de errores que vendría de no identificar adecuadamente cuáles son las estructuras algebraicas, es que los estudiantes tampoco sabrán hacer uso de estas estructuras para elaborar ecuaciones que resuelvan los problemas algebraicos (Chow, 2011). Así, los adolescentes tendrían dificultades para representar tanto funciones lineales como no lineales, y suelen determinar si una relación entre variables es una función o no, en base a si en el enunciado del problema ven una fórmula algebraica, tal y como " $\pm\sqrt{x^2 - 3}$ ", por lo que muchos estudiantes no considerarían que habría correspondencia –relación de función entre ambas variables- en la expresión " Mary debe 6$, y Sue debe 2$", porque no se incluye ninguna fórmula que "*a priori*" las relacione (Clement, 2001p.746). ¿Cuáles son las implicaciones para la enseñanza de las dificultades ligadas a la no comprensión del concepto de "estructura algebraica"?

d) Concepto de "expresión algebraica" (Ladele, 2013), Los estudiantes suelen concebir erróneamente lo que implica una "expresión algebraica. A menudo la entienden como la "descripción de una operación que implica variables como "3a", "x+1", o "x-y" (Wagner y Parker, 1999, p.331), lo que implica que les cuesta aceptar como solución final correcta a un problema una expresión que incluya uno o más términos. A este tipo de conceptos erróneos, se le suele conocer como "incapacidad para aceptar la falta de cierre,… el dilema nombre- proceso" (Chalouh y Herscovics, 1999), el "dilema de proceso- producto" (Sfard y Linchevski, 1994), o conjunciones erróneas (Tirosh, Even y Robinson, 1998). Por ejemplo, un estudiante difícilmente aceptaría una expresión algebraica como "2a+5b" como solución a un problema, por lo que suelen "resolver" la expresión, y dar como resultado final "7ab", como una "suma" de la expresión anterior (Booth, 1999). ¿Cuáles son las implicaciones para la enseñanza de las dificultades ligadas a la no comprensión del concepto de "expresión algebraica"?

e) Noción del proceso de objetivación. Los estudiantes tienen dificultad para entender y asimilar el llamado proceso de "objetivación" por medio del cual, una expresión algebraica puede actuar como un "objeto" o como un "proceso", dependiendo del contexto del problema, ya que una expresión algebraica adquiere su significado en función del contexto del problema dado (Davis, 1975; Sfard, 1991; Tall and Thomas, 1991). Por lo tanto, el adolescente debe aprender a identificar cuándo ha de pensar sobre un proceso en términos de operaciones sobre objetos (Dreyfus y col, 1990) y cuándo como objeto. Así, por ejemplo, la expresión "*3x + 2*", podría representar tanto el proceso de "añade tres veces *x* y dos", como el objeto "*3x + 2*". ¿Cuáles son las implicaciones para la enseñanza de las dificultades ligadas a la no comprensión de la idea de "objetivación"?

f) Concepción de lo que implica "aprender matemáticas". Los estudiantes a menudo tienen ideas preconcebidas sobre lo que significa aprender matemáticas –por ejemplo, mucho de lo que se aprende en Matemáticas es irrelevante para la vida (Schumacker, Young y Bembry, 1995)-, ideas que suelen llevar asociados sentimientos y emociones poco favorables al aprendizaje, como: bajo sentimiento de eficacia o gran nivel de ansiedad. ¿Cuáles son las implicaciones para la enseñanza de las dificultades ligadas a la no comprensión del concepto "aprender matemáticas"?

g) Concepción de lo que implica el signo igual ("="). Los estudiantes suelen cometer errores debido a una falta de comprensión de lo que significa el signo "igual" ("="), y sus propiedades dentro de una ecuación (Ladele, 2013). Una mayoría de estudiantes de Secundaria suele suponer que este signo implica que se debe escribir una respuesta final después de completar las operaciones necesarias (Kieran, 1992), o que implica un enlace con la siguiente operación (Stacey y MacGregor, 1997). Esto sugiere que los estudiantes suelen tener una perspectiva más "operacional" que "relacional" de este signo (Knuth y col, 2005), por lo que no entienden el concepto de que las transformaciones que se realizan en el proceso de resolver una ecuación, deben preservar la relación de equivalencia a ambos lados del igual (Egodawatte, 2011). Así, el propio concepto de ecuación incluye el concepto de igualdad tal y como en "una ecuación es una expresión algebraica de igualdad que contiene una letra o letras" (Herscovics y Kieran, 1999, p.185). ¿Cuáles son las implicaciones para la enseñanza de las dificultades ligadas a la falta de comprensión de lo que implica el signo igual ("=")?

h) Concepción procedimental de las matemáticas. Los alumnos a menudo conciben las matemáticas como una disciplina procedimental, hecho que dificulta la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico~~,~~ hecho que supone un exceso de dependencia de la memoria para asimilar los contenidos y resolver los problemas (Skemp, 1976/2006; Kieran, 2007).Es necesaria una comprensión relacional, incluso en procesos algorítmicos como la manipulación de símbolos (Kieran, 2007). Por ejemplo, el aprendizaje de procedimientos tales como los necesarios para resolver ecuaciones de la forma "$ax + b = c$", no serían útiles como base teórica para afrontar ecuaciones más complejas, tales como las de la forma "$ax + b = cx + d$".

Dado que los alumnos parecen tener dificultades en relación con los conceptos e ideas descritos, los teóricos sugieren aplicar métodos que ayuden a minimizar los conceptos erróneos que puedan ir adquiriendo los estudiantes en Matemáticas a lo largo de su escolaridad, los cuales deberían tener como base teórica enfoques globales y heurísticos, en donde aparezcan los contenidos algebraicos vinculados a otros contenidos matemáticos dentro de una estructura sistémica (Thorpe, 1989; Kieran, (1989, 1992; y Leitze, 1989).

Además, el método de enseñanza debería estar basado en un enfoque de funciones, es decir, en la variabilidad -cambio- entre variables (Chazan y Yerushalmy ,2003) -antes que en un enfoque parcial, centrado en los valores desconocidos a resolver, entendiendo el concepto de variabilidad como una medida de cambio que describiría diferencias entre muestras pequeñas y la población, variaciones en el significado de la variable a lo largo de una muestra y significación de pequeñas cantidades de variabilidad en muestras amplias (Watson y Kelly, 2005; Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy, 2003; Watson y Shaughnessy, 2004; Zawojewski y Shaughnessey, 2000).

Por último, los teóricos sugieren un método de enseñanza que incluya no sólo conceptos – "qué" o "por qué"-, sino también procedimientos -cómo-, conocimientos declarativos -qué- y condicionales -cuándo- en relación con cada una de las fases de resolución del problema (Egodawatte, 2011).

Hasta aquí se ha visto, a la luz de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra, sobre qué conocimientos y procesos habría que trabajar, pero no cómo convendrá hacerlo, ni tampoco qué procesos instruccionales requieren estudio por no ser suficiente la evidencia sobre su efectividad. Por esta razón, con el fin de tener una base sobre la que decidir a la hora o elegir un modo de entrenar, en el apartado siguiente se exponen los distintos procedimientos utilizados y se aporta evidencia sobre su efectividad

1.7.2. Cómo se ha entrenado la resolución de problemas algebraicos y cómo convendría llevar a cabo dicho entrenamiento en la actualidad

Teniendo en cuenta lo anterior, los tipos de *métodos* que actualmente se están examinando con estudiantes de secundaria para mejorar su resolución de problemas algebraicos, serían los siguientes:

a) Métodos que hacen uso de la tecnología industrial (Kieran, 2008), por medio de herramientas tecnológicas que facilitan a los estudiantes tutoriales que le acompañan en su proceso de resolución de problemas, mejorando las representaciones de las relaciones entre las entidades algebraicas, y fomentando nuevas formas de exploración análogas a las actividades de generación y transformación en el Álgebra (Kieran, 1996). Por ejemplo, hacer uso de hojas de cálculo que permiten comprender la generalidad numérica – en muestras amplias de números- a partir de la especificidad – casos concretos- (Ainley, Bills, y Wilson, 2004). Así, para autores como Nobre (2011) este sistema ayudaría a los adolescentes a: a) mejorar la comprensión de las condiciones de los problemas, es decir, las relaciones entre las variables implicadas y cómo expresar adecuadamente dichas relaciones y restricciones; y b) aproximarse de forma numérica a un problema algebraico, haciendo uso de columnas de variables numéricas, sin perder la estructura de los problemas.

Uno de los aspectos teóricos cruciales que tienen como base los *trabajos que se están llevando a cabo con las hojas de cálculo*, es que se apoyan en el método cartesiano de resolución de problemas algebraicos (Arnau, 2013). No es el momento de extenderse sobre este método, sin embargo es interesante comprender cuáles son sus premisas. Así, con el fin de alcanzar la triple competencia que aducían Filloy, Puig y Rojano – en el lenguaje natural del enunciado, en el lenguaje algebraico de la ecuación, y en la conversión del texto natural en ecuación- en la resolución de problemas algebraicos (Filloy, Puig y Rojano, 2008); Arnau (2013) se apoya en estos autores para sugerir trabajar con el método cartesiano de la forma siguiente:

- Paso 1. Es necesario pedir al adolescente que haga una lectura analítica del enunciado del problema con el fin de que reduzca el texto de dicho enunciado – lenguaje natural- a una lista de cantidades y relaciones entre cantidades que también es lenguaje natural, pero que únicamente incluye cantidades y relaciones entre cantidades. A partir de este texto analítico, el estudiante hará una traducción a otro texto que esté en lenguaje algebraico.
- Paso 2. El adolescente debe elegir qué cantidad o cantidades desconocidas se van a representar con una letra o con distintas letras.
- Paso 3. En este paso, el estudiante debe representar las cantidades desconocidas por medio de expresiones algebraicas que describen la relación aritmética que dichas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o por una expresión algebraica.
- Paso 4. A continuación, hay que elaborar una ecuación – o tantas ecuaciones como letras distintas se haya decidido incluir en el paso 2-, igualando dos expresiones que representen la misma cantidad, y haciendo una transformación de dicha ecuación a una forma canónica.
- Paso 5. Se aplica la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación canónica.
- Paso 6. Finalmente, el adolescente debe interpretar el resultado de la ecuación en los términos más significativos incluidos en el problema.

Arnau (2013), basándose en Filloy, Puig y Rojano (2008) también hace una sugerencia sobre cuáles deben ser las habilidades cognitivas que el adolescente debe poner en funcionamiento para seguir correctamente estos pasos. Así:

Primero, para llevar a cabo los pasos del método cartesiano del 2 al 4- elegir las cantidades desconocidas, representarlas y elaborar una ecuación-, el estudiante deberá tener adquirida competencia sobre: a) cómo generar reglas que le permitan construir expresiones algebraicas: b) cómo mantener el significado del texto del lenguaje natural a lo largo del proceso de transformación de dichas expresiones; y c) finalmente cómo expresar una misma cantidad – o tantas como letras se empleen- de dos formas diferentes para dar sentido a la construcción de la ecuación y que constituirá el significado algebraico del signo igual en la ecuación.

Y segundo, para los pasos 5 y 6 – aplicar la fórmula e interpretar el resultado de la ecuación-, el adolescente debe tener competencia en: a) cómo transformar un texto algebraico a otro texto que tenga el mismo sistema de signos, con el fin de reducir la ecuación- o sistema de ecuaciones- a una forma canónica u operable; y b) saber cómo calcular el valor de la cantidad o cantidades a la cual se asoció la letra o letras dadas; y, a partir de este valor o valores, calcular el resto de cantidades desconocidas.

Las limitaciones importantes que se han encontrado en los trabajos con las hojas de cálculo, son que no habría certeza de que el entrenamiento produjera cambios en la comprensión de los contenidos, sino más bien en la capacidad de aplicar procedimientos para resolver los problemas, o incluso, una adaptación del adolescente a cómo funciona tal o cual programa informático. También tendría dificultades en cuanto a su aplicación a muestras amplias, por lo costoso. Y por último, los mismos autores que trabajan en esta línea también indican posibles problemas de generalización a problemas de lápiz y papel o a problemas de la vida real.

b) Otro tipo de métodos serían los que promoverían el desarrollo de las habilidades meta cognitivas en los adolescentes, con el fin de que dichas habilidades hagan el papel de filtro con respecto a las habilidades cognitivas que está movilizando el estudiante cuando resuelve el problema, y quedarse con las más idóneas para su comprensión (Andrade y Valtcheva, 2009; Dermitzaki, Leondari, y Goudas, 2009; Fuson et al., 2005; Lin, Schwartz, y Hatano, 2005; Nemirovsky y Ferrara, 2009; Usher, 2009). Este tipo de habilidades parecen tener tal relevancia, que incluso, un estudiante con una capacidad meta cognitiva alta y aptitudes cognitivas bajas, podría desenvolverse de forma similar a un estudiante con aptitudes cognitivas altas y escasa capacidad meta cognitiva (Swanson, 1990). Además, los autores a favor, indican que sirven para conectar distintas formas de conocimiento, y que se relacionan con una ejecución alta en resolución de problemas matemáticos (Swanson, 1990, p. 312), promoviendo para medirla tanto el propio conocimiento como la regulación de la cognición (Schraw y

Dennison, 1994). Sin embargo, un método que sólo incluya el entrenamiento en metacognición, no sería suficiente para mejorar la resolución de problemas algebraicos, ya que sería necesario añadir explicaciones de aspectos tales como de qué forma se relacionan los distintos contenidos, o cómo identificar tales relaciones.

c) Un tercer tipo de métodos, abogaría por introducir mejoras en la interacción entre profesor- estudiantes, basándose en una perspectiva social del aprendizaje (Gustafsson, 2011). Según esta perspectiva, una mejora en la comunicación –retroalimentación dada a estudiantes, escucha, etc- aumentaría la comprensión de las Matemáticas. Sin embargo, otros autores indicarían que la mejora de la interacción entre profesor y alumno en el aula, mejoraría el clima de aprendizaje del aula, produciendo cambios en la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje (Alonso Tapia, 2012), pero no incidiría de forma directa en la resolución de problemas algebraicos. Entre las recomendaciones, estarían el llevar a cabo una práctica acumulativa, retroalimentación, solución secuenciada, revisión y transferencia de la información entre contenidos similares (Mayfield y Glenn, 2008). Otros métodos serían el de aproximación guiada (Abonyi y Nweke, 2014), o el de instrucción combinada (Miller, 2014). Por último, un método curioso que cambiaría el tipo de interacción del estudiante con el profesor, sería el de Strobino (2013) que ha examinado la realización de lo que él ha llamado "clase inversa" en la cual el profesor debe grabar en vídeo las explicaciones de los contenidos algebraicos que los estudiantes deben ver en casa, y dedicar la clase a resolver los problemas algebraicos.

Dentro de esta perspectiva social, también estarían los métodos que abogarían por un aprendizaje entre iguales, con técnicas como la del aprendizaje cooperativo (Esan, 2015).

d) Otro método implica *aplicar programas que incidan en el cambio conceptual* del adolescente, con el fin de mejorar su resolución de problemas, su comprensión de los conceptos matemáticos, y su actitud frente a la asignatura (Chow, 2011). Así, se trata de programas dirigidos a promover la comprensión en los estudiantes de Secundaria de los contenidos algebraicos, los cuales también incluyen un apartado dirigido a evaluar los cambios en las actitudes de los estudiantes con respecto a las Matemáticas, y que estaría promovido por actuaciones que fomentarían "experiencias de aprendizaje" significativo dentro de la clase de Álgebra. Dentro de este enfoque, se promoverían técnicas como la de comparación (Rittle-Johnson y Star, 2009), analogías (Araya y col, 2010), aprendizaje sobre equivalencias (Hattikudur y Alibali, 2010), representaciones múltiples (Panasuk, 2010), instrucción de probabilidad (Rakes, 2010), modelo virtual de la balanza (Rojano, 2010), "webbing strategy" o estrategia de aprendizaje visual (Orji, y Anaduake, 2010) y el método lingüístico (Ladele, 2013). El problema con este tipo de trabajos, es demostrar cómo un cambio en los conocimientos del estudiante, podría modificar su actitud frente a la resolución de problemas e incidir en una mejora de la comprensión de los contenidos algebraicos.

e) Otro tipo de métodos, sobre todo en relación a los estudiantes con dificultades específicas en Matemáticas, *sugerirían hacer uso de organizadores gráficos, a modo de soporte visual – diagrama jerárquico, organigrama de secuencias, y análisis y comparación de dichos organigramas* (Baxendrall, 2003)-, para ayudar a estos estudiantes a cuestiones como las siguientes: a) organizar y analizar información relevante de un problema; b) comprender de forma visual, el razonamiento abstracto que habría que aplicar para resolverlo; c) recordar los pasos a dar para resolver el problema; y d) organizar la información pertinente para resolver dicho problema. Sin embargo, y aunque este tipo de apoyo parece mejorar la ejecución en este tipo de estudiantes (Rimby, 2012), harían falta más estudios con muestras más elevadas, y está la cuestión de si realmente funcionan para el resto de estudiantes, sobre todo teniendo en cuenta que un organizador gráfico es un método de apoyo no algebraico que podría dificultar el acceso y comprensión de contenidos algebraicos de rango superior.

f) Otro tipo de enfoques incluyen distintos métodos, como es el caso del *análisis de Lian* (2012) que, en función de los trabajos realizados en la última década, sugiere combinar las siguientes características:

- La práctica del modelado, con el fin de ayudar a los estudiantes a visualizar la relación abstracta entre las cantidades, y a comprender mejor los símbolos y manipulaciones de las ecuaciones algebraicas (Ferrucci, Yeap y Carter, 2003).
- La necesidad de que los adolescentes tengan la oportunidad de resolver una amplia gama de problemas algebraicos con una serie diferente de métodos de resolución (Meyer, 1999), tales como: crear un clima de clase donde se puedan

aplicar varias estrategias, saber identificar en los estudiantes los distintos tipos de comprensión matemática - las cuales se revelan a partir de las diferentes estrategias de resolución-, alentar a los estudiantes a resolver los problemas, y facilitarles una comprensión de las estrategias que van a aplicar.

- La última propuesta de Lian (2012) sería poner énfasis en la Aritmética, con el fin de construir una buena base de habilidades algebraicas de resolución de problemas, y aplicarlas en la vida diaria, sobre todo en problemas que requieran para su resolución hacer uso de una ecuación.

Con respecto al modelado, habría que tener especial cuidado en cómo llevarlo a cabo, para que realmente fomente la comprensión de los contenidos algebraicos. La segunda propuesta de Lian (2012), basada en Meyer (1999) habría que matizarla ya que la simple exposición a un banco elevado de problemas, no garantiza en los estudiantes la comprensión de los contenidos relacionados. El propio Lian propone algunas estrategias que complementen esta aplicación masiva, sin embargo no incluye técnicas que se han probado eficaces tales como dar retroalimentación inmediata y consistente (métodos de tutoriales informáticos, como la hoja de cálculo), o resolver problemas de la vida cotidiana. Y en relación a la tercera propuesta de poner énfasis en la Aritmética, parece probada la utilidad de hacer uso de una base aritmética sólida para enseñar los contenidos algebraicos nuevos, pero habría que poner especial cuidado en clarificar que dicho material aritmético sólo se aplicará como apoyo inicial en las clases de Álgebra; así como también habría que definir de la forma más precisa posible cuáles son las diferencias entre ambos tipos de contenidos, para evitar que los conocimientos aritméticos se asimilen como una base teórica estructural permanente -y no como un contenido procedimental temporal- , de los nuevos contenidos algebraicos y acaben constituyendo un obstáculo para comprender e interpretar dichos contenidos, mucho más complejos y basados en estructuras no aritméticas (Kuchemann, 1981; Ntsohi, 2013).

Por otra parte, y en relación al momento de aplicación del método, haciendo un paralelismo con las fases de adquisición del conocimiento de Piaget, Lian (2012) sugeriría tener en cuenta la fase de desarrollo cognitivo de la habilidad algebraica concreta en la que estuviera el adolescente. Estas habilidades, seguirían una secuencia de adquisición como la siguiente sugerida por Sfard (1995), en donde primero se alcanzarían habilidades y una comprensión puramente operacional –Álgebra operacional-, a continuación habilidades más estructurales –Álgebra estructural de un valor fijo y desconocido-, se llegaría a habilidades funcionales –Álgebra de variables-, y finalmente el estudiante alcanzaría habilidades y una comprensión más abstracta de estos contenidos –Álgebra más compleja-.

g) Por último, otros autores sugerirían que un método de enseñanza efectivo del Álgebra, debería estar *centrado en el estudiante* (Ntsohi ,2013), subrayando así el aspecto del constructivismo de que es el propio estudiante quien construye su propio conocimiento, basándose tanto en sus conocimientos - esquemas-previos, como en su participación activa en su propio proceso de aprendizaje (Fry, Ketteridge y Marshall, 2009, pp.9-10). Otro aspecto del constructivismo es que el adolescente entra en clase con ideas preconcebidas – algunas inestables y fácilmente desmontables y otras no – y que sería el papel del profesor primero comprobar la naturaleza de tales concepciones y segundo, modelarlas para establecer una base sólida sobre la que realizar las conexiones con los nuevos contenidos y producir el aprendizaje tanto de proceso- realizando conexiones entre los esquemas-, como de producto- el resultado final del aprendizaje que se plasma en la solución final al problema.

Para lograr aprendizajes significativos, Ntsohi (2013), sugeriría centrar el método de enseñanza en el estudiante en dos pasos. Primero, mostrando el Álgebra de forma contextual, es decir, haciendo uso de "contextos significativos" para el adolescente, que serían aquellas situaciones de su entorno que les resulten familiares (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996, p. 13), y que no necesariamente tienen que referirse a situaciones de la vida real, ya que lo sustancial es su cercanía a los estudiantes y que puedan organizarse de forma matemática (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Esta enseñanza contextual implica el establecimiento de conexiones, no sólo entre los distintos tópicos matemáticos - Geometría, Estadística, Medida, Radio o Proporción -, sino también del Álgebra en relación a áreas tales como la Geografía, la Contabilidad, o la Ciencia.

Segundo, llevando a cabo una aplicación de técnicas de mejora de las "habilidades de resolución de problemas" (French, 2002, p.5), lo cual se podría aplicar y entender de la doble forma siguiente.

Por un lado se trataría de resolver problemas como un "propósito" de aprendizaje, que implica un concepto de resolución de problemas general aplicado a problemas que no tendrían una solución inmediata, y que precisan aplicar habilidades cognitivas tales como exploración, ampliación, investigación, o capacidad de resolver problemas más generales (Bell ,1996). Permite indagar en lo más profundo del problema en función de las demandas del mismo (Freudenthal, 1991, p.47) y favorece la capacidad de retener el conocimiento y habilidades adquiridas, así como de transferirlas a problemas similares – proceso de generalización y realización de consecuentes predicciones-, de disfrutar la experiencia mientras descubren - reinventan- el conocimiento, de analizar los propios procedimientos de solución, y de experimentar el efecto de "ahá!" – Eureka!- cuando finalmente se entiende el problema.

Para Ntsohi (2013) sería a este tipo de problemas al que se aplicarían las fases de resolución siguientes sugeridas por Polya (2013):

- Comprensión del problema.
- Elaboración de un plan o decidir un enfoque para abordar la resolución.
- Poner en práctica el plan.
- Y, por último, "mirar hacia atrás"- o volver al problema, respuesta o lo que se haya venido haciendo hasta llegar al punto actual-, e interpretar la solución en términos de la pregunta realizada.

Y serían problemas con respecto a los cuales los adolescentes deberían alcanzar una comprensión muy precisa, y desarrollar habilidades para hacerse una representación adecuada, identificar las variables implicadas en el proceso de solución, establecer las relaciones pertinentes entre dichas variables, un plan de acción, aplicar la estrategia de resolución, reflexionar sobre la misma, e interpretarla en función de la situación original del problema.

Por otro lado, la otra interpretación de lo que significaría para Ntsohi (2013) resolver problemas, sería como un "medio" para lograr el aprendizaje y la comprensión de los contenidos algebraicos. Y, desde esta perspectiva, la mejor forma de enseñar habilidades de resolución de problemas, sería a través de la experiencia real de resolver problemas reales (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Human, Olivier y Wearne (1996, p. 12). Para este autor, esto significa "problematizar el tema del que trate el problema", que significa fomentar que los adolescentes se hagan preguntas, busquen soluciones, y resuelvan incongruencias. Y así es como debería iniciar el currículo para la enseñanza del Álgebra, centrando la enseñanza en propiciar que los estudiantes formulen problemas, dilemas y se hagan preguntas sobre las diferentes situaciones que les rodean (Hiebert y col, 1996), haciendo conjeturas y criticando y justificando las soluciones que aportan. Por lo tanto, Ntsohi (2013) sugeriría empezar la enseñanza del Álgebra fomentando este enfoque de resolución de problemas, en el cual los adolescentes tengan la oportunidad de lidiar por sí mismos con el problema y descubrir sus posibles soluciones. Así, primero deberían elaborar estrategias de solución estrechamente ligadas al contexto – aplicable a un caso en particular-, y a continuación, tratar el contexto de forma general, haciendo uso de modelos que puedan ser aplicables para resolver problemas de naturaleza similar – generalizando la solución a problemas similares-. A partir de la reflexión sobre actividades y soluciones dadas a problemas de nivel inferior, se ayudará al estudiante a ir poco a poco capacitándose para alcanzar el nivel próximo de comprensión y así sucesivamente (Van de Heuvel-Panhuizen, 2000).

Para lograr estas habilidades, el profesor debería tener muy claras la naturaleza y organización de los problemas con los que trabaja en clase, así como conocer lo mejor posible las habilidades matemáticas de sus alumnos y ser resolutivo y aplicar la creatividad al diseñar los problemas, con el fin de captar el interés de sus estudiantes en Álgebra. Por lo tanto, al diseñar los problemas, se deberían tener en cuenta las cuestiones siguientes:

- Deberían atender a un amplio rango de habilidades cognitivas de los adolescentes, con el fin de que, al finalizar cada sesión, todos hayan alcanzado éxito al resolverlos, con el valor motivacional consiguiente.
- Deberían permitir varias formas de resolución y estar elaborados en base al nivel de conocimientos previos de los estudiantes, de forma que éstos puedan aplicar sus conocimientos e ideas previas para resolverlos.
- Deberían ser atractivos para los estudiantes, es decir, estar centrados en sus focos de interés.
- Deberían estar relacionados con las experiencias previas de los adolescentes, y ser situaciones que puedan imaginar y comprender con facilidad.
- Deberían promover un desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes, con el fin de que se comprometan en la adquisición de “hábitos mentales” matemáticos (Cuoco, Goldenberg y Mark, 1996, pp.378-383), que les permitan desarrollar su capacidad matemática personal.

- Deberían estar basados en las habilidades y conocimientos previos algebraicos de los estudiantes, para que aprendan a ser identificadores de patrones, experimentadores, pensadores, descriptores, inventores, visualizadores, ser capaces de hacer conjeturas, y anticiparse a situaciones y soluciones (Cuoco y col, 1996, pp.3-8).
- Y deberían tener un nivel diferente de complejidad, porque han de ser representativos de situaciones distintas que los adolescentes se van a encontrar en su vida real (Van de Heuvel-Panhuizen, 1996, p. 13). Y, debido a que no todos los problemas de la vida real requieren el mismo tiempo de resolución, serán problemas que promuevan la perseverancia hacia la resolución de problemas.
- Por último, el clima de clase mientras se están resolviendo los problemas algebraicos, debería posibilitar que los estudiantes interactúen con el problema y escuchen las ideas de otros (Van de Walle, 2004, p. 38).

Este planteamiento desarrollaría en los estudiantes, entre otras habilidades, la perseverancia hacia la resolución de problemas, ya que los problemas de la vida real, no requieren todos el mismo tipo de resolución, e incluso, algunos, requieren un cierto tipo de madurez que no todos los estudiantes tienen.

Para trabajar con un banco de problemas que tenga las características anteriores, Nstohi (2013) sugeriría aplicar técnicas como las siguientes:

- Tener en cuenta los principios de interacción y guía en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra, basándose en la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky (ZDP, Fry, Ketteridge y Marshall, 2009, p.21), que enfatizaría el papel del contexto social y cultural en la adquisición del aprendizaje. Así, habría que fomentar que el entorno de la clase ofreciera a los estudiantes la oportunidad de intercambiarse ideas y compartir sus experiencias, estrategias o reinvenciones bajo la guía del profesor, mientras interactúan con los contenidos algebraicos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, p. 9).
- Saber hacer uso dependiendo de la situación, de los cuatro tipos de discursos habituales en clase de Matemáticas (Setati, 2005, p. 449):
  1) Primero, procedimental, por medio del cual, se explican los pasos que se están aplicando en un proceso algebraico como resolver una ecuación lineal.
  2) Segundo, contextual, en el cual se ayuda a los estudiantes a comprender el contexto en el cual se establecen las relaciones entre las entidades matemáticas,

por ejemplo, cuál es la relación entre las variables que están representadas en una ecuación.

3) Tercero, conceptual, en el que los adolescentes se dan “auto explicaciones”, es decir, se dan razones para comprender qué operaciones específicas están llevando a cabo para resolver el problema dado (Setati, 2005, p.449). Por lo tanto, la “auto explicación” sería una estrategia meta cognitiva que facilitaría la construcción del conocimiento (Aleven y Koedinger, 2002, pp.149-150) y por lo tanto, la comprensión de los contenidos, ya que, entre otros procesos, ayuda al profesor a conectar el lenguaje propio del estudiante con el lenguaje especializado del Álgebra. Ahora bien, esta situación sólo es posible cuando el profesor facilita un clima de clase que conduzca al verdadero aprendizaje y guía a los estudiantes a través de diferentes niveles para conseguirlo (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, p.9). Por ejemplo, el profesor puede formular preguntas tales como “¿Por qué se ha hecho tal o cual operación?”, o pedir a los estudiantes que comenten las respuestas que haya dado otro estudiante, siendo técnicas que se pueden aplicar en toda la clase, o en grupos pequeños.
4) Y, cuarto, el discurso de regulación, que no está directamente relacionado con el desarrollo de conceptos, pero sí con motivar, movilizar y promover que los estudiantes se centren en sus propios aprendizajes, y que además sirve para regular su propia conducta mientras se está encaminando hacia el logro de los objetivos de aprendizaje (Setati, 2005, p. 449). Por ejemplo, el uso del refuerzo positivo y de la motivación para trabajar adecuadamente.

- Saber también hacer uso de instrucciones o métodos explícitos y sistemáticos, que ayuden a mejorar las habilidades matemáticas en estudiantes con dificultades en este área - estudiantes con LD (Miller, 2014)-. Por ejemplo, aplicar algunas de las técnicas de Miller produciría mejoras en estos estudiantes en la resolución de ecuaciones de uno y dos pasos, y en su comprensión del signo de igual como símbolo relacional.
- Y, por último, saber aplicar una estrategia cooperativa de resolución de problemas, en donde unos estudiantes se ayuden a otros, y compartan ideas, mientras están resolviendo problemas algebraicos de palabras (Esan, 2015).

Esta interesante perspectiva de Ntsohi (2013), parece muy acertada en cuanto a poner el foco de atención en el estudiante y su contexto más cercano. Así, desde la perspectiva de que un aprendizaje se logra cuando se sabe aplicar, parece razonable suponer que iniciar la enseñanza del Álgebra desde el contexto próximo del estudiante, supondría un avance con respecto a métodos más descontextualizados - hoja de cálculo, entrenamiento de habilidades cognitivas en problemas dentro de clase- en cuanto a que se produzca una auténtica situación de significatividad para el estudiante, que le permita activar los mecanismos cognitivos necesarios para enganchar significativamente sus conocimientos previos con los nuevos contenidos algebraicos. De hecho, desde este enfoque se promueve trabajar con la capacidad de hacer sugerencias, suposiciones, de indagar, de buscar situaciones similares, de establecer y aplicar estrategias y planes personales para resolver el problema y finalmente, de revisar el trabajo realizado para detectar posibles fallos y adaptar en la medida de lo posible el proceso de resolución a la situación real del problema.

Sin embargo, además de las desventajas del uso de la hoja de cálculo, este enfoque implica llevar a cabo una gran estructuración tanto del método de enseñanza, como del banco de problemas con el que se trabaje. El propio Ntsohi (2013) ya explicó cómo deberían ser los problemas con los que trabajar, pero seguiría haciendo falta un uso estructurado de técnicas concretas tanto para lograr el mantenimiento de la motivación durante el proceso de aprendizaje (Alonso Tapia y Heredia, 2012), como para fomentar el auténtico aprendizaje – retroalimentación, explicación de contenidos de menor a mayor dificultad, formulación de preguntas pertinentes, poner ejemplos significativos, etc-, así como se echa en falta una estructuración del banco de problemas en sí que, basándose en los trabajos sobre transferencia de contenidos, permita ir elevando – y evaluando - el nivel de habilidades algebraicas que van adquiriendo los estudiantes.

Aplicar un entrenamiento en autorregulación con un sistema de cálculo algebraico, para mejorar el aprendizaje algebraico con estudiantes con dificultades de aprendizaje (Tam, 2003) parece que mejora tanto el comportamiento cognitivo y metacognitivo de los estudiantes como el logro resultante. el logro. Autores como Foegen (2010) recomendaría las siguientes estrategias para ayudar a mejorar la resolución de problemas a los estudiantes con dificultades específicas en las Matemáticas: tutoría entre iguales, instrucción de la estrategia cognitiva, y rutinas instruccionales explícitas.

A continuación se incluye un cuadro en donde puede verse una comparativa de los trabajos consultados, en los cuales se pone el énfasis en los métodos indicados con anterioridad (Tabla 1.7).

Tabla 1.7. Intervenciones instruccionales en conceptos relacionados con la resolución de problemas algebraicos en estudiantes de secundaria

Autor y año	***Propósito***	***Muestra***	***Diseño***	***Variable dependiente***	***Resultados***
Ives (2007)	Evalúa el efecto de un organizador gráfico, mientras se está aprendiendo a resolver sistemas de ecuaciones lineales	N=40 M=31 F=9 Edad: 13.6 – 19.3 Grado: 6-12	Pretest / posttest (a) organizador gráfico (b) instrucción tradicional	VD: el desarrollo de investigación para justificar conceptualmente los procedimientos para sistemas de ecuaciones en dos variables	(a)>(b) en posttest
Rittle-Johnson y Star (2007)	Evalúa el efecto de aprender a resolver ecuaciones algebraicas, haciendo uso de las comparaciones	N=162 M =81 F=81 C = 144 A= 8 H = 2 Grado:7-8 Edad: 11.9 – 15.1	Pretest/ posttest (a) métodos de soluciones comparables (b) tipos de problemas comparables (c) ecuaciones equivalentes comparables	VD: Elaboración del investigador sobre conocimiento conceptual y procedimental, equivalencias, términos similares, variables compuestas, uso de atajos, y conocimiento flexible	Conocimiento conceptual (a)>(b), (c) Conocimiento procedimental: mejora en todo (a)=(b)=(c) Métodos de solución flexible [(a)= (b)] > (c) Conocimiento flexible (a) > (c)
Hattikudur y Alibali (2010)	Evalúa el efecto del aprendizaje sobre equivalencias, en conjunción con otros símbolos de comparación	N = 106 M=52 F=54 Grado: 3 (n = 80) 4 (n = 26)	Pre-test/ pos-test (a) Signos de comparación (b) signo de igual (c) control	Creación del investigador: Resolución de problemas Reconstrucción Conceptual Definición Clase de símbolo Clase de estamento	Resolución de problemas NS (a)= (b)= (c) Reconstrucción NS (a) = (b)= (c) Conceptual (a)> (b) > (c) Definición (a)NS >(b)>(c) Clase de símbolo (a)> (b) NS >(c) Clase de estamento (a)> (b) > (c) Definición [(a)>(b)] >(c) Resolución de desigualdades [(a) >(b)] > (c)
Panasuk,RM (2010)	Evalúa el efecto de las representaciones múltiples en la comprensión algebraica Ecuaciones lineales con un valor desconocido	N_{total} = 753 Grado: 7-9 USA Edad: 12-15	Experimental (a) estrategia de representaciones múltiples (b) instrucción tradicional	VD: Encuestas exhaustivas y entrevistas sobre extraer información del problema, representar la información de otras formas, manipular las representaciones y evaluar las soluciones de los problemas	(a) >(b) en todas las fases y medidas
Rakes, C. (2010)	Evalúa el efecto de la instrucción en probabilidad para mejorar los conceptos erróneos en Álgebra, Geometría y Números Racionales	N = 1142 Grado:10-12 Edad :16-18 Metodología mixta Pretest/posttest GE/GC (a)Método de instrucción en Probabilidad	VD: un instrumento para evaluar el conocimiento del NAEP, *Inventario de Actitudes en Matemáticas (Mathematics Attitudes Inventory, ATMI),* *Inventario Metacognitivo (Metacognition Inventory, MAI)*	(a)Efectos positivos	
Rojano, T (2010)	Evalúa el método de modelo virtual de la balanza para resolver ecuaciones de primer grado Ecuaciones: Ecuaciones lineales	N = 8 Grado: 1-2 ESO Edad: 12-14	Pretest/Posttest GE (a)Método modelo virtual de la balanza	VD: Cuestionarios para evaluar las producciones de signos de los estudiantes como interacción entre sistemas de signos algebraicos, aritméticos y del modelo virtual de la balanza.	(a) efectos positivos limitados

Autor y año	Propósito	Muestra	Diseño	Variable dependiente	Resultados
Panasuk, RM (2010)	Experimental (a) estrategia de representaciones múltiples (b) instrucción tradicional	VD: Encuestas exhaustivas y entrevistas sobre extraer información del problema, representar la información de otras formas, manipular las representaciones y evaluar las soluciones de los problemas Grade: 7-9			(a) >(b) en todas las fases y medidas
Rakes, C. (2010)	Evalúa el efecto de la instrucción en probabilidad para mejorar los conceptos erróneos en Álgebra, Geometría y Números Racionales	N = 1142 Grado:10-12 Edad: 16-18	Metodología mixta Pretest/posttest GE/GC (a)Método de instrucción en Probabilidad	VD: un instrumento para evaluar el conocimiento del NAEP, *Mathematics Attitudes Inventory (ATMI), Metacognition Inventory (MAI)*	(a)Efectos positivos
Rojano, T (2010)	Evalúa el método de modelo virtual de la balanza para resolver ecuaciones de primer grado Ecuaciones: Ecuaciones lineales	N = 8 Grado: 1-2 ESO Edad: 12-14	Pretest/Posttest GE (a)Método modelo virtual de la balanza	VD: Cuestionarios para evaluar las producciones de signos de los estudiantes como interacción entre sistemas de signos algebraicos, aritméticos y del modelo virtual de la balanza.	(a) efectos positivos limitados
Orji, ABC y Anaduaka, U (2010)	Evaluar el efecto de la estrategia instruccional "webbing" en la resolución de problemas algebraicos de palabras "Webbing" es una técnica de aprendizaje visual, en el cual habría un relato de información sobre un área de conocimiento o sobre un concepto, expresado de forma pictórica.	N = 118 M=57 F=61 Grado:7-12 Edad: 12-18	Cuasi-experimental Pretest/posttest GE / GC (a) *Estrategia de aprendizaje visual (Webbing strategy)* (b) Instrucción tradicional	VD: *Word problem achievement Test (AWPAT)*	(a)>(b)
Mok, I (2010)	Se examina el efecto de las tareas usadas en las entrevistas como altenativa innovativa para profundizar en la comprensión por parte de los estudiantes tanto de las letras como variables, como de la ley distributiva.	N= 203 Grados: 7,8, 9,10 y 12	(a) Método que consistía en 6 tareas de entrevista con la ley distributiva como eje común, y con un grado de complejidad creciente guiado por la taxonomía SOLO. Por medio de esta taxonomía (Biggs y Collis, 1982), se podían clasificar los aprendizajes observados de los estudiantes en:pre estructurales, uni	VD: Entrevistas por medio de 6 tareas para averiguar cómo los estudiantes aplicaban la ley distributiva.	Las tareas para la entrevista ofrecen al profesor una forma de enseñanza que permite integrar el conocimiento de los alumnos sobre aspectos mecánicos del Álgebra, estructuras algebraicas y manipulación simbólica.

Autor y año	Propósito	Muestra	Diseño	Variable dependiente	Resultados
			estructurales, multi estructurales, relacionales y resumen ampliado. Las 5 primeras tareas, se explican en el artículo, y son: Tarea1: los estudiantes debían entender la propiedad distributiva en la multiplicación. Tarea 2: los estudiantes debían buscar la relación entre la multiplicación y la división. Tarea 3: los estudiantes debían entender la propiedad distributiva en la división. Tarea 4: entender la aplicación de la propiedad distributiva en suma, resta, multiplicación y división		
Egodawatte, G (2011)	Método que evalúa los errores y conceptos erróneos en la resolución de problemas algebraicos	N = 6 M= 3 F=3 Edad :17	Grade:11	Método mixto: cuantitativo y cualitativo, (a)entrevistas individuales (b) tests sobre problemas	VD: Test sobre variables, expresiones algebraicas, ecuaciones y *Word problems* narrados Entrevistas individuales
Nobre, S et al (2011)	Evalúa el efecto de la Hoja de Cálculo para resolver problemas algebraicos	N = 3 M= 1 F=2 Grado:8 Age :13-14	Cualitativa e interpretativa GE (a) *Hoja de Calculo (Spreadsheet*	VD: Entrevistas individuales	(a)efectos positivos
Chow, TCF(2011)	Evalúa el efecto de un programa instruccional de cambio conceptual , por medio del cual se promueve el cambio de conceptos en la asimilación de conceptos algebraicos, y que por lo tanto: a-Facilita la comprensión en los estudiantes de los conceptos algebraicos b-Permite valorar los cambios en las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje matemático	N = 39 Grado:8 Edad :14	Diseño mixto: cualitativo y cuantitativo Pretest/posttest (a)programa de cambio conceptual	VD: Test de diagnóstico algebraico (TOMRA) para evaluar la comprensión de los conceptos algebraicos Entrevistas individuales para evaluar actitudes hacia el aprendizaje matemático	(a)efectos positivos
Rimby, KJ (2012)	Evalúa el efecto de un programa informático de organizador gráfico, en la ejecución algebraica de estudiantes con dificultades en Matemáticas (LD) Ecuaciones	N = 8 M= 5 F=3 Grado:10 Edad :15	Diseño único Pretest/ Posttest GE/GC (a)Organizador gráfico Fases: AB, ABC (b)instrucción tradicional Pretest/posttest	VD: Hojas de Cálculo suplementarias de los libros de texto y tests elaborados por los profesores	(a)>(b)

Autor y año	***Propósito***	***Muestra***	***Diseño***	***Variable dependiente***	***Resultados***
Arnau,D y Puig, L (2013)	Evalúa el efecto del entorno de la Hoja de Cálculo en la resolución de problemas algebraicos, y su relación en la competencia en el método cartesiano Problemas verbales aritmético-algebraicos	N = 24 M= 11 F=13 Grado:2ESO Edad :13-14	Pretest- posttest (a)Hoja de cálculo (*Spreadsheet)*	VD: Problemas, protocolo audio-visual	(a)efectos positivos
Strobino, C(2013)	Evalúa el efecto de una clase "inversa" con respecto a los deberes, en la comprensión y actitudes hacia el Álgebra Una clase "inversa" es aquella en la cual sucede la siguiente inversión de términos habitual en clase: a) por un lado, los estudiantes estudian en casa por medio de vídeos que el profesor graba sobre los contenidos algebraicos a estudiar; y b) por el otro, hacen los deberes en la clase, con lo cual el profesor puede ayudarles en esta cuestión. Se llama método inverso porque habitualmente sucede al revés, es decir, se dan las explicaciones de los contenidos en clase y se hacen los deberes en casa.	N = 33 Grado:7, 9, 11 y 12 Edad :12-18	Cualitativa, cuantitativa Prestest/posttest (a)Clase inversa (*Flipped classroom)*	VD: *Student Algebra Confidence,* Entrevistas individuales,	(a)efectos positivos
Ladele, OA (2013)	Evalúa el efecto de un enfoque lingüístico de aproximación a la resolución de problemas algebraicos, en donde: a-Se incluían estrategias de enseñanza basadas en el lenguaje, a través de las cuales se ayudaba a los estudiantes a comprender los términos, expresiones y el texto en general de *word problems* b- A los profesores se les incrementaba el conocimiento sobre los conceptos erróneos de los estudiantes acerca de las variables, expresiones y ecuaciones.	$N_{teachers}$ = 30 $N_{students}$=181 Grado:7-12 Edad :12-18	Diseño de caso único Pretest/posttest Método mixto: cualitativo y cuantitativo (a)Programa de entrenamiento al profesorado (b)aplicación del programa a los estudiantes	VD: test sobre álgebra, entrevistas con el protocolo Newman, Cuestionario	(a)y (b) efectos positivos
Ntsohi, MME (2013)	Evalúa el efecto del entorno de la hoja de Cálculo en la resolución de problemas algebraicos	N = 15 Grado:9 Edad :15	Aproximación multicasual Método mixto. GE (a)*Hoja de cálculo en Excel (Spreadsheets)*	VD: cuestionario, entrevista, grabación de vídeo, protocolo de observación,	(a)efectos positivos

Autor y año	Propósito	Muestra	Diseño	Variable dependiente	Resultados
Hughes, E(2014)	Evalúa el efecto de 9 métodos (6 métodos incluidos aquí) de enseñar el Álgebra a estudiantes con discapacidades en Matemáticas (MD) para mejorar su ejecución, con el fin de averiguar cuál de estos métodos obtendría mejores resultados: **M_1:** Método de Bokhove y Drijvers (2012) que usa la tecnología por medio de programas de cálculo interactivo para resolver ecuaciones algebraicas, aplicado a estudiantes de riesgo de dificultades en Matemáticas (MD). **M_2:** Método de Corlu, Capraro y Corlu (2011) basado en modelos cognitivos para resolver problemas de ecuaciones algebraicas, aplicado a estudiantes de riesgo de MD. **M_3:** Método de Ives (2007) de organizadores gráficos para resolver ecuaciones lineales, aplicado a estudiantes con dificultades de aprendizaje específicas (SLD) y estudiantes con déficit de atención (ADHD). **M_4:** Método de Whisted (2012) de co-enseñanza con dos profesores, uno de enseñanza ordinaria y otro de enseñanza extraordinaria, aplicado a estudiantes con SLD y ADHD. **M_5**: Método de Witzel (2005) en donde se aplican secuencias de enseñanza –sistemática y explícita-, para resolver ecuaciones usando primero procedimientos, a continuación representaciones de procedimientos y finalmente, números abstractos y símbolos. Aplicado a estudiantes con SLD **M_6**: Método de Witzel, Mercer y Miller (2003) en donde se aplican secuencias de enseñanza –sistemática y explícita-, para resolver ecuaciones usando primero procedimientos, a continuación representaciones de procedimientos y finalmente, números abstractos y símbolos. Aplicado a estudiantes de riesgo de MD.	N_1 =286 N_2= 150 N_3= 24 N_4= 58 N_5= 231 N_6= 68 Grado:7-12 Edad:12-18	GE GE/GC GE/GC GE/GC GE/GC GE/GC (a)Método que hace uso de la tecnología por medio de programas de cálculo interactivo (b) Método basado en modelos cognitivos de los problemas. (c) Método de organizadores gráficos. (d) Método de co enseñanza. (e), y (f) Método de secuencias de enseñanza.	VD: Cuestionario de problemas: Exponentes (M_1), Ecuaciones (M_2, M_4,, M_5), Álgebra(M_3, M_6), Funciones lineales (M_3)	(b)<[(b), (d), (e)] < (a)

Autor y año	***Propósito***	***Muestra***	***Diseño***	***Variable dependiente***	***Resultados***
Areelu, F y Akinsola, MK(2014)	Evalúa el efecto de la Estrategia Instruccional por Niveles (TLIS) y de las Estrategias Instruccionales Personalizadas de Grupo (GPIP) en el logro matemático. La estrategia TLIS, se trata de poner actividades de aprendizaje a partir de lo que saben hacer los estudiantes, con el fin de promover su aprendizaje continuo. Y las estrategias GPIP, se trata de poner en el contexto matemático, las experiencias pasadas e intereses de los estudiantes.	N = 337 M=206 F= 131 Grado:7-12 Edad :12-18	Diseño cuasi exp Pretest-posttest 2GE y GC 3x3x2 (a)TLIS(GE1) (b)GPIP(GE2) (c) instrucción tradicional	VD: Test de logro matemático *Mathematics Achievement Test (MAT)*	(a)>(b)>(c)
Abonyi, OS Nweke, I (2014)	Evalúa el efecto del método de aproximación guiada en problemas algebraicos	N = 145 M= 81 F=64 Grado: 7-12 Edad :12-18	Cuasi exp GE y GC Pretest-posttest (a)método de aproximación guiada (b)instrucción tradicional	VD: *Algebra Achievement Test (AAT)*	(a)>(b)
Miller, JA (2014)	Evalúa el efecto del método de instrucción combinada en la resolución de problemas de ecuaciones y en la comprensión del signo igual en estudiantes con MD Ecuaciones: ecuaciones lineales de uno y dos pasos	N = 17 Grado:7 Edad :12-13	Diseño de caso único Pretest/posttest (a)método de instrucción combinada	VD: medidas basadas en el currículo para resolver ecuaciones, test de valoración del conocimiento (KME)	(a)efectos positivos
Esan, F (2015)	Evalúa el efecto de la estrategia de aprendizaje cooperativo en la resolución de problemas algebraicos	N =240 Grado:7-12 Edad :12-18	GE/GC (a)Estrategia de solución de problemas *,CPS)* (b)Instrucción tradicional	VD: *Mathematics Achievement Test (MAT),* *Problem-solving Attitude Scale (PSAS)*	(a)>(b)

En estos estudios, realizados entre 2010 y 2015, se ha examinado el efecto de diferentes métodos de enseñanza para producir una mejora en la resolución de problemas algebraicos, dando lugar a los resultados que se han indicado con anterioridad. Ahora bien, en función de los resultados de dichos estudios, se ha tratado de aplicar otros métodos que podrían resultar más beneficiosos para producir mejoras en la resolución de problemas algebraicos, los cuales están incluidos en la tabla 1.8.

Tabla 1.8 Intervenciones instruccionales en conceptos relacionados con la resolución de problemas algebraicos que hacen uso de la autorregulación y la transferencia en estudiantes de secundaria

Autor (año)	***Propósito y foco***	***Muestra***	***Diseño de investigación / intervención***	***Variable dependiente***	***Resultados***
Mayfield, K. y Glenn, I. (2008)	Evalúa el efecto de 5 intervenciones instruccionales –práctica acumulativa, *retroalimentación* por niveles, instrucción de *retroalimentación* y solución, práctica de revisiones, y entrena-miento en transferencia-.	N = 3 M = I F= II Grado: 4, 7, 8, Edad: 9, 13, 14	Pretest/posttest (a)método de práctica acumulativa (b) *retroalimentación* por niveles (c)instrucción de *retroalimentación* y solución (d)práctica de revisiones (e)entrenamiento en transferencia	VD: cinco tareas de resolución de problemas aplicadas de forma separada para evaluar: (1)Nivel 1, tarea de resolución de problemas de ecuaciones (2)Nivel 2, tareas de resolución de problemas	(a), (b),(c),(d) no tuvieron efectos grandes en la ejecución ni del nivel 1,ni del nivel 2. {(a),(b),(c),(d)} < (e)
Kramarski, B.; Weiss, I.; y Sharon, S.(2013)	Se examinan dos enfoques de aprendizaje – (a)genérico, en donde se dan indicaciones para mejorar la comprensión y conexión de tareas y (b)específico, con sugerencias sobre el qué, cuándo, por qué y cómo resolver tareas- con respecto a la mejora en las siguientes áreas para la resolución de problemas: a-Habilidades de autorregulación (planificación, monitorización, y evaluación) b-Conocimiento procedimental de tareas algebraicas rutinarias c-Transferencia del conocimiento a la resolución de problemas algebraicos nuevos.	N= 61 Grado: 7 Edad: 13-14	Test / pretest Método: (a)enfoque genérico (b)enfoque específico Dos grupos: 1) Bajo logro 2)Alto logro	VD: 1) Inventario de conciencia metacognitiva (Metacognitive Awareness Inventory, MAI; Schraw y Dennison, 1994) para autorregulación 2)Escala de conocimiento algebraico procedimental para evaluar resolución tareas algebraicas 3) Test de transferencia a largo plazo en tareas nuevas. Test de Long-Term transfer to novel tasks: Verbal problem solving (Presmeg, 1986) para transferencia.	(a)=(b) para las tareas procedimentales (a)>(b) para las habilidades de autorregulación (planificación y monitorización) y transferencia en los estudiantes con bajo logro (a)>(b) para habilidades de autorregulación (evaluación auto percibida) en los estudiantes de alto logro
Ferguson, T (2014)	Se examinaba la efectividad de un juego digital de aprendizaje (*Digital Game-Based Learning, DGBL*) en la resolución de problemas algebraicos.	N=222 Grado:9 Edad: 16	Método: (a)DGBL, en donde se hacían juegos de simulación y exploración para enseñar a resolver problemas algebraicos. (b)Método tradicional	VD: test para Secundaria de Álgebra 1 (*North Carolina End-of-Course Test, EOC*) para evaluar el logro matemático en Álgebra	(a)<(b)

Autor (año)	***Propósito y foco***	***Muestra***	***Diseño de investigación / intervención***	***Variable dependiente***	***Resultados***
Barrus, D.A. (2014)	Examina la efectividad de un método de enseñanza que incluía autorregulación basada en un tutorial de página web – con respecto a un grupo control y a otro grupo con tutorial de página web, pero sin autorregulación- con respecto a la resolución de problemas algebraicos, motivación y habilidades de autorregulación.	N=74 H=42 M= 32 Grado:8 Edad: 15	Diseño cuasi-experimental Pre-test/ post-test Método: (a)Tradicional (grupo Control) (b)Tutorial de página Web (Grupo Experimental 1) (c)Tutorial de página Web con Autorregulación de e-learning de “Let Me Learn”(Grupo Experimental 2)	VD: resultados en Matemáticas post-test de motivación SRL	(a) <(b)< (c)
Long, Y. y Aleven, V.(2013)	Se examina el impacto de un Modelo de Aprendizaje Abierto (OML) en: (1)resolución de problemas de ecuaciones lineales (2) autoevaluación	N= 56 Grado=7 Edad:14	Test/pretest Método: (a)Modelo de Aprendizaje Abierto (OML) (b)El estudiante podía seleccionar el próximo problema a resolver	VD: (1)Test con problemas de ecuaciones lineales (2)Cuestionario para evaluar la autoevaluación	(a)>(b)

Como puede observarse a partir de la revisión realizada hasta aquí, se proponen distintas formas de estructurar el entrenamiento, pero son escasos los estudios que inciden en cómo entrenar dos de los procesos cuya importancia para el aprendizaje del álgebra es especialmente alta, a saber los procesos de *autorregulación* y *transferencia.* La consulta de trabajos más recientes centrados en estos procesos (Barrus, 2014; Ferguson, 2014; Jitendra y col, 2009, 2011; Kramarski, Weiss y Sharon, 2013; Long y Aleven, 2013; Maccini, 2007 y 2011; Mayfield y Glenn, 2008; Montague, 200), sugiere que es preciso que el entrenamiento se centre sobre todo en *facilitar que sea el propio estudiante quien monitorice lo que está haciendo* mientras está resolviendo un problema algebraico – a partir de la toma de conciencia de cómo lo está resolviendo- y quien regule su propio proceso de resolución-, y que *propicie que elabore esquemas cognitivos nuevos cada vez que deba resolver un problema algebraico nuevo*.

A continuación se recoge lo que dice la investigación sobre la forma en que estos condicionantes del método educativo producirían mejoras en la capacidad de resolver problemas algebraicos.

1.7.3 Autorregulación: ¿Cómo promover en el estudiante la autorregulación de lo que hace cuando está resolviendo un problema algebraico?

1.7.3.1. ¿Qué es la autorregulación?

En primer lugar, habría que clarificar a qué se llama *autorregulación.* Este *proceso, está muy ligado al concepto de toma de conciencia* por parte del estudiante de lo que está haciendo cuando está resolviendo un problema algebraico. Así, la mayoría de los estudios realizados desde la Psicología Cognitiva, coinciden en la premisa de que, para resolver un problema, un estudiante debería movilizar tanto procesos de tipo cognitivo -lectura, comprensión y planificación / aplicación-, como procesos de tipo meta cognitivo o de darse cuenta de lo que está haciendo - monitorizar, evaluar y supervisar- mientras está resolviendo dicho problema (Flavell, 1981; Jacobs y Paris, 1987; Wilson y Clarke, 2004). En realidad, se trataría de un proceso que fomentaría que el adolescente conozca las opciones disponibles para resolver el problema, que sea capaz de evaluar la utilidad potencial de dichas opciones, y de hacer una elección final de la ruta más eficiente para dirigirse a la meta que se ha propuesto (Schoenfeld, 1985).

Otra premisa fundamental, consiste en que *la autorregulación implica que, mientras está resolviendo un problema algebraico, el estudiante va cambiando sus actuaciones en función de la valoración que va haciendo de las opciones* que va tomando y de su utilidad potencial, de tal forma que si la evaluación es positiva, continuaría por el mismo camino y si es negativa, llevaría a cabo un balance y consideraría otras opciones para resolverlo (Schoenfeld, 1992; Geary, 1994). A todas estas actuaciones –procedimientos y reglas- que pone en funcionamiento un adolescente para resolver el problema, Geary las llamó "espacio del problema", y lo define como todos los procedimientos y reglas que el estudiante pone en funcionamiento para resolver un tipo particular de problema, así como las distintas formas que elige para resolverlo. Por lo tanto, los procesos implicados en elegir la mejor estrategia también serían un mecanismo meta cognitivo o de toma de conciencia que adoptaría un estudiante sobre cómo está resolviendo el problema dado (Clement, 1982; Mayer, 1982)

Para que un proceso de meta cognición sea eficaz, el adolescente debe activar un tipo de memoria llamada *"memoria matemática*", la cual no consiste en la mera repetición de conceptos sin un significado concreto, sino un tipo de memoria que favorece la adquisición y consolidación de conocimiento conceptual (Ebdon, Coakley y Legnard, 2003).

Para clarificar aún más este concepto - y por oposición al concepto de "actividad cognitiva" implicada en "hacer"-, autores como Flavell (1981) sugirieron que la "meta cognición" estaría implicada en la selección y planificación de "qué hacer" y en la monitorización de lo que ya se ha hecho, frente a la actividad de simplemente hacer sin reflexión. Y, por su parte, Artzt y Armour-Thomas (1992) ofrecieron la clasificación de tareas que está en la Tabla 1.9, en función del binomio de proceso cognitivo/meta cognitivo.

Con posterioridad a estos estudios, ha habido trabajos que han sugerido que pedir a un adolescente que dé una explicación de lo que está haciendo cuando resuelve un problema algebraico, es una técnica que permitiría identificar cuáles han sido los conceptos erróneos sobre los que se ha apoyado para resolver dicho problema (Egodawatte, 2011). Este procedimiento de auto explicación se puede llevar a cabo aplicando la técnica de la entrevista o por medio de un cuestionario por escrito, siendo una forma muy útil no sólo para que el estudiante sepa lo que está haciendo cuando resuelve el problema, sino de que también lo conozca el profesor y pueda aplicar las recomendaciones o cambios donde sea necesario. Esta técnica la ha usado la investigadora para su tesis, siendo una forma que no está exenta de problemas, ya que es necesario que los estudiantes dispongan de suficiente conocimiento procedimental sobre cómo trabajar con las entidades algebraicas, y también de conocimiento conceptual para saber explicar "por qué" funcionan los procedimientos y algoritmos usados y ser capaces de comprender las interconexiones entre ambos tipos de conocimiento. Pero, además, los adolescentes no sólo deberían poner en funcionamiento conocimiento condicional – sobre "cuándo" hacer uso de algo-, sino también de tipo declarativo – que se indique el "qué" de los conceptos, hechos y principios- que permite al estudiante tener una base para explicarlos.

Tabla 1.9. Clasificación de tareas en función del binomio cognitivo/meta-cognitivo

TIPO DE TAREA	CLASIFICACIÓN DEL PROCESO	
	COGNITIVO	METACOGNITIVO
LEER	√	
COMPRENDER		√
ANALIZAR		√
EXPLORAR	√	√
PLANIFICAR		√
APLICAR	√	√
VERIFICAR	√	√

Parece que el entrenamiento de las habilidades de autorregulación produciría mejoras en la capacidad de resolver problemas matemáticos en estudiantes de secundaria (Fuchs, 2003b; Kroesbergen y Van Luit, 2003; y Montague, 2006). Estudios como los de Pintrich y DeGroot (1990), Schunk (1996) y Zimmerman y Martinez-Pons (1986, 1988), también aportan evidencia en este sentido.

El entrenamiento en autorregulación parte de la definición de autorregulación como una "capacidad del estudiante de supervisar lo que está haciendo mientras está resolviendo un problema matemático y de darse cuenta de si dicha actuación es o no correcta" (Swanson y Sáez, 2003). Es decir, que el entrenamiento en monitorización en la capacidad de darse cuenta de lo que hace cuando resuelve un problema matemático y de regular todo el proceso, mejoraría la resolución de problemas matemáticos.

Los componentes cognitivos que habría que entrenar para que se produzcan estas mejoras y que formarían parte del entrenamiento en autorregulación, serían los siguientes: la planificación de metas, la auto-instrucción, el hacerse preguntas a uno mismo y auto-evaluar el proceso que se ha seguido para resolver el problema matemático (Montague, 2006). Antes de pasar a ver cómo entrenarlos, conviene, sin embargo, aclarar la diferencia entre habilidades estratégicas y autorregulación.

1.7.3.2. ¿Qué diferencias hay entre habilidades cognitivas de tipo estratégico y habilidades de autorregulación?

Al entrenamiento de estos componentes, se añadiría la necesidad de promover una *mejora en las habilidades cognitivas de tipo estratégico* frente al problema, con técnicas tales como la *S.T.A.R.* (Search, Traslate, Answer y Review) de Maccini y Hughes (2000) y Maccini y Ruhl (2000), la cual fomenta habilidades cognitivas tales como la búsqueda de un problema similar, la traducción del enunciado en una ecuación resoluble, el dar una respuesta al problema y finalmente hacer una revisión de dicha solución. Según los trabajos consultados, el uso de este tipo de técnicas de entrenamiento estratégico mejoraría tanto la habilidad de los estudiantes para representarse los problemas algebraicos, como la resolución que dan a dichos problemas, y la generalización de la estrategia que han usado en problemas similares y a lo largo del tiempo. Para facilitar por parte de los adolescentes la aplicación de la estrategia que sea, se les debe enseñar a formularse una serie de preguntas conforme van avanzando en la resolución del problema. En el caso de la estrategia S.T.A.R. estas preguntas son: ¿qué hechos conozco?, ¿qué necesito encontrar?, o ¿tiene sentido la respuesta? y ¿por qué?

En otros trabajos como el de Hutchinson (1993) se encontró que incluir una estrategia de planificación del problema, producía mejoras en adolescentes tanto en la propia resolución del problema como en el mantenimiento de la estrategia de autorregulación a lo largo del tiempo y aplicándola a problemas similares.

Si se llevara a cabo un entrenamiento en autorregulación con adolescentes, de los aspectos cognitivos indicados, habría que saber *en qué elementos cognitivos relacionados con la capacidad de resolver problemas se producirían tales mejoras.* Según los trabajos consultados la autorregulación produciría mejoras en un adolescente en los siguientes aspectos cognitivos:

1) En su *capacidad de elaborar mapas cognitivos eficaces, es decir, globales y amplios,* que le permitan construirse una representación mental lo más adecuada posible del problema (Sawyer y col, 1992; Fuchs y col, 2003b). Los trabajos parecen indicar una relación entre el entrenamiento directo de habilidades tales como la clasificación de objetivos a alcanzar para resolver el problema, o la auto evaluación del proceso de resolución que se está siguiendo (Zimmerman, 1989, 1990); y una mejora en la actitud e incremento del esfuerzo relacionado con la elaboración de dichos mapas cognitivos.
2) En su *capacidad de ordenar la información relevante* del problema (De Corte, Schunk, 1986, 1996; Verschaffel y Eynde, 2000; Zimmerman, 1995), que previamente ha almacenado en su memoria a corto plazo.
3) En la *atención* que pone en la tarea de resolver problemas. Este efecto parece producirse cuando se realiza un entrenamiento directo de la "toma de conciencia" por parte de un adolescente, de lo que está haciendo mientras está resolviendo un problema (Salomon y Perkins, 1989). También se logra, cuando se entrena la toma de decisiones, la clasificación de objetivos, y la auto-monitorización y auto-evaluación de la propia ejecución (Zimmerman, 1989, 1990).
4) En su capacidad de adoptar un *enfoque estratégico* para resolver problemas algebraicos. Parece ser que el hecho de recibir entrenamiento en habilidades tales como clasificar los objetivos a alcanzar para resolver el problema, favorecería el cambio de un enfoque directo por otro más elaborado e individual de aproximación a este tipo de problemas (Graham y Harris, 1989; y Graham y Harris, 1997; y Sawyer, Graham y Harris, 1992; Swanson, 1999).[comprobar que los autores citados son de Secundaria y no, o no sólo, de Primaria]
5) En las *creencias* que tienen los adolescentes, no sólo con respecto a la tarea de resolver problemas algebraicos, sino también con respecto a sí mismos y su propia

capacidad para resolver estos problemas. Así, los trabajos sugerirían un incremento en el aprecio o valoración positiva, que adoptaría un estudiante con respecto al uso de la autorregulación (Zimmerman, 1995), así como en su percepción de auto eficacia -o propia habilidad- para resolver dichos problemas (Schunk, 1986, 1996; y Zimmerman, 1995). Estos resultados, se han encontrado incluso, en estudios de una sola sesión (Zimmerman y Kitsantas ,1999). Y relacionado con esta mejoría, parece haber también un incremento en la *motivación intrínseca* del estudiante frente a la tarea de resolver problemas (Schunk, 1996).

6) En las *habilidades cognitivas de tipo superior* que la investigación sugiere como necesarias para resolver problemas complejos, tales como ser capaz de tomar conciencia de lo que se está haciendo cuando se está resolviendo un problema algebraico, o la capacidad de perseverar hasta hallar la solución (De Corte y col, 2000; Resnick y Resnick, 1992; Rothman, 1995).
7) Y, por último, en un *incremento tanto del control* que el adolescente ejercería sobre la tarea de resolver problemas, como de su *autonomía* al afrontar dicha tarea (Montague, 1992; Montague, Applegate, y Marquard, 1993).

1.7.3.3. Efectos probables del entrenamiento combinado en habilidades estratégicas y autorregulación.

Se puede concluir a partir de los trabajos revisados y mencionados anteriormente que el entrenamiento directo en adolescentes de las habilidades de autorregulación para resolver problemas algebraicos produciría las siguientes mejoras en las habilidades cognitivas de aquéllos:

- Mejora en aspectos concretos de las habilidades de autorregulación tales como: auto valoración positiva, auto instrucción, saber formularse preguntas, saber hacer las comprobaciones de lo que está haciendo y darse el refuerzo contingente a los avances que vaya teniendo (Montague, 2006);
- Mejora en la flexibilidad de sus mapas cognitivos debido al control y a la toma de conciencia de lo que está haciendo cuando resuelve un problema;
- Incremento de las creencias positivas del estudiante sobre la tarea de resolver problemas (J. Beltrán, 1993, cap.1);

- Mejora en la motivación intrínseca a la tarea de resolver problemas matemáticos (Schunk, 1986, 1996; Zimmerman, 1995);
- Aumento de la insistencia del estudiante a la hora de resolver problemas (De Corte y col, 2000);
- Incremento de la capacidad del estudiante par comprender los contenidos matemáticos relacionados con el problema conocido (De Corte, Verschaffel y Eynde, 2000; Montague, 2007; y Zimmerman, 1995);
- Mejora en la capacidad del estudiante de darse cuenta cuándo comete errores y cuándo acierta;
- Un descenso a largo plazo de costes en términos de tiempo y esfuerzo invertido en la resolución del problema;
- Aumento en la cantidad de atención, concentración y esfuerzo invertido en la tarea (Fuchs y col, 2003);
- Actitud más positiva hacia resolver problemas matemáticos;
- Mejora en el auto concepto académico del estudiante a nivel general y no sólo en Matemáticas (Montague, 1992);
- Mejora de la tarea en sí de resolver problemas matemáticos (Borkowski y Buechel, 1983; Licht y Kistner, 1986; Montague, 2006)
- E incremento en la generalización de los contenidos aprendidos de unos problemas a otros.

Según la investigación consultada, estos resultados se podrían aplicar a los estudiantes con independencia de sus *historias previas de logro académico* (Fuchs, 2003b), o de las *dificultades específicas* que puedan tener con los contenidos algebraicos.

Respecto al primer punto, *el efecto de la historia previa de logro académico*, los trabajos sugerirían una mejora en la resolución de problemas algebraicos, aunque diferencial en función de la historia previa de logro académico de un estudiante (Fuchs, 2003b). Por lo que, estudiantes con historia de logro exitosas – los cuales ya suelen realizar actuaciones de autorregulación tales como, invertir más tiempo en analizar el problema que en encontrar la solución, reflexionar sobre su forma personal de resolver problemas o adoptar un enfoque flexible de aproximación al problema (Lester y

Garofalo, 1982; Schoenfeld, 1992; y Silver, Branca y Adams, 1980)- , mejorarían en menor medida en autorregulación, que los estudiantes con historias de logro académico medias o bajas. El hacer este análisis de los resultados del entrenamiento en autorregulación, teniendo en cuenta la historia de logro académico, se inició con el trabajo de Fuchs de 2003, el cual también supuso un avance con respecto a otros estudios que no habrían mostrado de forma tan clara el efecto independiente de la autorregulación en sus resultados finales (DeCorte y colaboradores, 2000; Lester, Garofallo y Kroll, 1989; Schoenfeld, 1985, 1992; o Verschaffel y colaboradores, 1999). Por todo ello, los trabajos consultados recomendarían tener en cuenta la historia previa de logro académico de los estudiantes participantes, y hacer un análisis independiente de los efectos del entrenamiento en autorregulación al analizar los resultados posteriores a la aplicación de un entrenamiento de este tipo (Borkowski y Buechel, 1983; Licht y Kistner, 1986; y Schunk, 1996).

Respecto al segundo punto, *si los resultados sobre el beneficio del entrenamiento en autorregulación, predecirían también mejoras cognitivas en los estudiantes con dificultades específicas en las Matemáticas,* la investigación indica que estos estudiantes son aquellos que tienen problemas en las tres áreas siguientes (Foegen, 2010): en el proceso cognitivo que siguen para resolver problemas, en la base contextual sobre la que se apoyan para resolver problemas algebraicos y en los propios conceptos algebraicos . Ahora bien, a pesar de estas desventajas, los trabajos parecen apuntar a una mejora en su rendimiento cuando se les entrena en autorregulación (Robbins y Harway, 1977; Tollefson, Tracy, Johnsen, Buenning, y Farmer, 1982), tanto en trabajos que parten de los principios derivados de la investigación sobre la memoria (Swanson, y O´Shaughnessy, T., y Swanson, H.L., 1998) , como en trabajos iniciados por Bandura, Gusec, y Menlove (1966) y Meichenbaum (1977) basados en los principios de la instrucción verbal. Estas mejorías se darían en la resolución de problemas de multiplicación y división (Van Luit y Naglieri, 1999) y de mitades, donde hay que averiguar la mitad de un número en estudiantes de primaria (Owen y Fuchs, 2002). Estos estudiantes también mejorarían en su capacidad de planificar la resolución de un problema, de darse cuenta de lo que están haciendo cuando lo están resolviendo y de comprobar si la solución final es correcta (Montague, 1996). Las habilidades de autorregulación adquiridas, se generalizarían incluso a problemas más complejos (Van Luit y Naglieri, 1999).

1.7.3.4. Metodología idónea para el entrenamiento en autorregulación.

La *metodología más idónea para hacer este entrenamiento lo más efectivo posible*, parece ser que sería aquella en donde se incluyera una estrategia de autorregulación como el procedimiento "Solve It!" de Montague (1996), que consistía en una estrategia de cuatro pasos llamada S.A.C. (SAY, ASK, CHECK, en español di, pregunta y comprueba), en donde los adolescentes debían verbalizar de qué forma habían entendido el problema, formularse preguntas que guiaran el proceso de solución y comprobar todos los pasos que iban dando hasta dar con la solución (Tabla 1.10):

Tabla 1.10. Auto monitorización para resolver problemas (Montague, 2003)

- *Paso 1. Encuentra el tipo de problema*
  ¿He leído y me he explicado el problema para saber si es una variante de un tipo de problema ya conocido?
  ¿He buscado el tipo de asociación entre dos dimensiones?
  ¿El problema implica un tipo de estamento del tipo: "Si… entonces" que corresponda con dos pares de asociaciones?
- *Paso 2. Organiza la información usando el diagrama del problema nuevo*
  ¿He escrito los niveles de las dos dimensiones en el diagrama?
  ¿He escrito los números dados por los dos pares de asociaciones en el diagrama?
  ¿He escrito un "?" para el número desconocido?
- *Paso 3. Haz un plan para resolver el problema*
  ¿He transformado la información del diagrama en una frase o ecuación matemática?
- *Paso 4. Resolver el problema*
  ¿He averiguado el número desconocido en la frase o ecuación matemática?
  ¿He escrito la respuesta completa?
  ¿He comprobado si la respuesta tenía sentido?

Los trabajos consultados indican que *la metodología debería ir acompañada de unos guiones escritos* que se deberían dar a los adolescentes con los procedimientos que deben seguir para resolver el problema, ya que esto reduciría el espacio de improvisación y facilitaría una mejor asimilación de dicho procedimiento. En dichos guiones, se pueden incluir los procesos cognitivos que los adolescentes deben seguir, incluyendo acrónimos tal y como el acrónimo *RPVHECC* "*Read, Paraphrase, Visualization, Hypothesize, Estimate, Compute, Check*", -en español: "Lee, repite, visualiza, hipotetiza, estima, calcula y comprueba"-), que usó Montague en su trabajo de 1996 y que se presenta en la Tabla 1.11.

Tabla 1.11. Ejemplo de esquema para enseñar estrategias generales de solución de problemas (A partir de Mayer, 2004a, y Montague, 2003).

Cada vez que hagas un problema:
Léelo.
- *Lee* el problema intentando entenderlo… y reléelo si es necesario.
- *Pregúntate*: ¿he entendido cada una de sus partes?
- *Compruébalo* antes de seguir adelante.
Exprésalo en tus palabras
- *Subraya* la información importante y expresa el problema en tus propias palabras.
- *Pregúntate*: ¿Qué es lo que me pregunta? ¿Qué tengo que buscar?
- *Comprueba* si la información que tienes tiene que ver con la pregunta.
Visualízalo
- *Realiza* un dibujo o un diagrama que represente gráficamente el problema, si es posible.
- *Pregúntate*: ¿Se ajusta el dibujo a todo que realmente dice el problema?
- Comprueba paso a paso si el dibujo realmente recoge todos los elementos del problema.
Planifica lo que vas a hacer para resolver el problema
- *Decide* qué pasos vas a dar (qué estrategia vas a utilizar) y qué operaciones se requieren.
- *Pregúntate:* Si hago esto… ¿qué voy a obtener? Y después, ¿qué tengo que hacer?
- *Comprueba* si lo que has planificado tiene sentido y permite responder a la pregunta planteada.
Trata de anticipar la respuesta
- *Redondea* los números, haz mentalmente el problema y anota la respuesta.
- *Pregúntate:* Teniendo en cuenta el redondeo, ¿tiene sentido la respuesta?
- *Comprueba* si has utilizado todos los datos si te parezca que no tiene sentido.
Realiza los cálculos
- *Realiza* las operaciones paso a paso
- *Pregúntate*: ¿Concuerda la respuesta obtenida con la respuesta anticipada?
- *Comprueba*, si las respuestas no concuerdan, si has hecho las operaciones correctamente
Repasa y comprueba que todo está bien.
- *Comprueba* que la formulación del problema, el plan seguido y los cálculos son correctos.
- *Pregúntate*, si no es así, dónde está el error
- *Pide ayuda*, si no sabes resolver el problema.

Otro grupo de *auto preguntas* que los estudiantes se podrían hacer conforme fueran avanzando en la resolución de los problemas Algebraicos, serían ~~como~~ las que se hicieron en trabajos como el de Hutchinson (1993), en el cual los adolescentes debían rellenar tarjetas con información acerca de la representación y solución del problema Ejemplos de estas auto preguntas están en la Tabla 1.12.

Tabla 1.12. Tarjetas con auto preguntas para resolver problemas algebraicos (Montague, 2003)

Auto preguntas para representar problemas algebraicos:

- ¿He leído y entendido cada frase?, ¿Hay algunas palabras cuyo significado tenga que preguntar?
- ¿He hecho todo el dibujo, he hecho una representación del problema?
- ¿He escrito mi representación en el gráfico de la clase? (objetivos desconocidos, conocidos, tipo de problema, ecuación)
- ¿Qué debería buscar en un problema nuevo para ver si es el mismo tipo de problemas que ya conozco?

Auto preguntas para resolver problemas algebraicos:

- ¿He escrito una ecuación?
- ¿He escrito los términos?
- ¿He escrito los pasos para dar con mi solución en el gráfico de la clase? (términos recogidos, aislamiento de los términos desconocidos, resolver los términos desconocidos, comprobar mi respuesta con respecto al objetivo, y escribir mi respuesta)
- ¿Qué debería buscar en un problema nuevo para ver si es el mismo tipo de problema?

Esta metodología debe aplicarse teniendo en cuenta los aspectos siguientes (Montague, 2006):

1) El profesor debería hacer uso del *moldeamiento* para mostrar a los adolescentes cómo aplicar las estrategias de autorregulación para resolver problemas Algebraicos;
2) Habría que dar a los estudiantes tarjetas de recuerdo que incluyan objetivos o información a recordar tal como el tipo de preguntas que deben hacerse o las instrucciones que deben seguir hasta completar la tarea;
3) Propiciar que los adolescentes hagan un entrenamiento de la autorregulación en voz alta hasta estar cómodos con la rutina;

4) Y finalmente, darles objetivos e indicaciones de forma externa sobre cómo resolver la tarea, hasta que puedan dárselos ellos mismos.

Este proceso debería aplicarse siguiendo una *secuencia de aprendizaje* como la siguiente (Graham Harris, 1989; Sawyer, Graham Harris, 1992; Jitendra, Hoff y Beck, 1999; Jitendra, DiPippi y Perron-Jones, 2002; Xin, Jitendra y Beatline-Buchman, 2005):

1) Darse cuenta del proceso y de los pasos que está siguiendo para resolver el problema.
2) Aprender a identificar los errores que comete.
3) Identificar qué aciertos tiene.
4) Hacer una evaluación adecuada de la solución que da al problema.
5) Hacer una planificación para resolver dicho problema.
6) Llevar un control tanto en la aplicación como en el seguimiento de dicha planificación.
7) Darse instrucciones y hacerse preguntas que le vayan guiando en la solución.

Estos efectos positivos en las capacidades de los estudiantes de resolución de problemas, hacen que la mayoría de los trabajos consultados sugieran la enseñanza de estas técnicas cuanto antes en el proceso de escolaridad de un estudiante (Swanson y Jerman, 2006).

La limitación fundamental de hacer sólo un entrenamiento en autorregulación sería que no se puede identificar realmente qué parte del entrenamiento facilita la formación de mapas cognitivos, y por ello no se puede regular el método para propiciar en mayor o menor medida la formación de dichos mapas. Otra limitación sería que no se trabajan de forma directa las habilidades de generalización de lo aprendido, con lo que el estudiante no sabe realmente lo que tiene que hacer para llevar a cabo la transferencia entre unos problemas y otros. Por ello, hacen falta trabajos que entrenen de forma directa la formación de mapas cognitivos.

1.7.4 ¿Cómo facilitar en los estudiantes de secundaria la elaboración de esquemas o mapas cognitivos que faciliten dicha la transferencia entre problemas del mismo tipo?

Un "esquema" es una forma de representación de la información en la memoria humana que permite el almacenamiento, síntesis, generalización, y recuperación de experiencias similares que haya tenido un sujeto de forma que se puedan identificar fácilmente, experiencias actuales en dichas experiencias pasadas (Marshall, 1995; Piaget, 1948).

Se forma un esquema cuando un sujeto trata de comprender, entender, organizar, o formar sentido de una situación nueva (Greeno y col, 1996). Y la base para la formación del esquema sigue siendo piagetiana, en el sentido de que, en la construcción del conocimiento, siempre hay una estructura de base a partir de la cual se puede empezar la construcción del conocimiento y a la cual se llama “estructura de asimilación”. Al proceso contrario, el de revisión continua de las estructuras cognitivas ya formadas, se le llama “estructura de acomodación” (Noddings, 1990). A partir del desarrollo de ambas estructuras – de construcción y revisión continua del conocimiento-, el estudiante elabora sus esquemas o mapas cognitivos, los cuales no sólo deben construirse de forma adecuada, sino también ser revisados de forma periódica.

Además, la forma de construir el propio conocimiento que tiene un estudiante cuando está resolviendo un problema matemático, se refleja en las estrategias que usa para resolver dichos problemas a partir de las cuales construye las estructuras cognitivas adecuadas para resolverlo, y que es lo que condicionará el éxito que tenga al resolver dichos problemas (Confrey, 1991). Según Confrey en la generación de estas estructuras cognitivas, el estudiante actúa de la forma siguiente: primero identifica el problema, a continuación trabaja con él, refleja los resultados de sus acciones por medio de operaciones, y finalmente hace comprobaciones para determinar si ha resuelto el problema de forma satisfactoria. Si el proceso seguido es exitoso, se repite en circunstancias nuevas para crear un esquema y, finalmente, se constituye en una respuesta más automática a la situación nueva dada (Confrey, 1991). Parece que este es el tipo de esquemas que trae un sujeto cuando resuelve un problema, y son esquemas que emergen a partir de asimilaciones de la experiencia a modo de formas de conocimiento, son los que tienen una duración y repetición mayor y son más fáciles de examinar que acciones aisladas (Confrey, 1994).

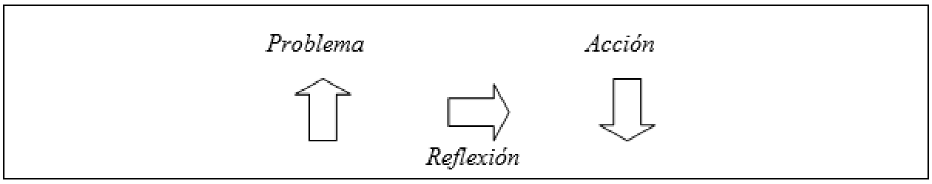


Figura 1.7. Estados en la resolución de problemas (Confrey,1991, p. 119)

Lo que la investigación indica sobre la formación de mapas cognitivos y la resolución de problemas, es que el estudiante debe aprender a *elaborar esquemas o mapas cognitivos lo suficientemente amplios y flexibles* como para poder aplicarlos a un mayor número de problemas posible del mismo tipo que los problemas conocidos, y no sólo entre problemas que guarden poca distancia entre sí, sino también entre aquellos que tengan una mayor distancia. Por ello, no sólo es necesario entrenar a los estudiantes a hacer mapas cognitivos eficaces, sino también a realizar ese intercambio de información o transferencia entre los problemas nuevos y los conocidos (Maccini, Mulcahy, y Wilson, 2007).

Según los trabajos consultados, parece que el entrenamiento en hacer transferencias adecuadas entre los problemas nuevos y los conocidos, mejoraría la resolución de problemas matemáticos. De hecho, autores como el propio Fuchs (2003), indican que el hecho en sí de resolver un problema matemático, ya lleva implícita una forma de transferencia, en la cual es necesario que el adolescente sepa trasladar información relevante del problema conocido, al problema nuevo para resolverlo (Bransford y Schwartz, 1999; Mayer, Quilici y Moreno, 1999). Sin esa posibilidad, el sujeto tendría que elaborar un mapa cognitivo distinto cada vez que tuviera que resolver un problema, lo que implicaría un enlentecimiento del proceso de comprensión y resolución del nuevo problema.

A pesar de su efecto positivo en la resolución de problemas, esta forma de transferencia parece ser difícil de asimilar por la mayoría de los estudiantes, con el consecuente efecto negativo en su capacidad matemática. De hecho, parece que muchos de ellos acaban las enseñanzas primarias sin desarrollar ninguna-o suficiente-habilidad en este sentido, lo cual influye de manera negativa en su capacidad de resolver problemas matemáticos. Por ello, algunos autores han indicado la necesidad de instruir en habilidades de transferencia a los estudiantes ya desde la etapa de primaria (Brown, Campione, Webber y McGilly, 1992).

La cuestión estaría en clarificar en *qué consiste elaborar mapas cognitivos que propicien una transferencia adecuada entre problemas*. Se trata de enseñar al adolecente a elaborar un esquema del enunciado del problema que represente de la forma más exacta posible, el contenido relevante de dicho enunciado, es decir, su contenido de significados. Cuanto más exacto y abstracto sea el esquema, a mayor número de problemas podrá aplicarse, es decir, mayor capacidad llevará implícita de transferir información relevante de los problemas conocidos a los problemas nuevos del mismo tipo.

Para lograr que los adolescentes elaboren mapas cognitivos lo más amplios posible, los trabajos indican que habría que darles instrucción para fomentar la consecución de los tres objetivos siguientes de los que ya hablaron Cooper y Sweller (1987):

a) Primero, hay que instruir al adolescente para que *conozca y domine las reglas de solución del problema*, es decir, debe saber qué tipo de reglas lógicas aplicar para resolverlo;

b) Segundo, hay que indicarle de forma directa que es necesario *que elabore o conozca las categorías en que se agrupan los problemas del mismo tipo* y que por lo tanto, requieren de soluciones similares;

c) Tercero, hay que explicarle de forma explícita *que tenga en cuenta cuál es la relación entre los contenidos de los problemas nuevos y los conocidos*.

Según la investigación consultada, se habrían hecho bastantes estudios que justificarían el efecto positivo de facilitar la consecución de los dos primeros objetivos.

En relación con el *primer objetivo* de Cooper y Sweller, parece que cuando un estudiante conoce -o incluso domina - las reglas lógicas bajo las cuales debe plantearse la solución a un problema, se reduce drásticamente la necesidad de que haga uso de su memoria de trabajo para encontrar dicha solución (Mawer y Sweller, 1985; y Sweller y Cooper, 1985; Fuchs, 2006). Esto sugeriría tanto que el estudiante podría invertir sus recursos cognitivos en otros aspectos tales como identificar las conexiones con los problemas nuevos o incrementar la capacidad de planificar el propio trabajo (Cooper y Sweller, 1987), como que la transmisión de reglas lógicas en clase de matemáticas, podría mejorar la ejecución en esta asignatura (Mawer y Sweller, 1985; y Sweller y Cooper, 1985; Fuchs, 2006).

Sobre el *segundo objetivo* de Cooper y Sweller, parece ser que la elaboración de esquemas lo suficientemente amplios, mejoraría la capacidad de resolver los problemas matemáticos (Gick y Holyoak, 1983). Esto sucedería porque los estudiantes serían capaces de aplicar una misma base teórica a un número elevado de problemas. Ahora bien, para que dichos esquemas funcionen, el estudiante debería hacerlos incluyendo "*una descripción general de dos o más problemas*", ya que esto le permitiría "*agrupar problemas en tipologías que requieran métodos de solución similares*" (Gick y Holyoak, 1983). La elaboración señalada supone que antes de hacer el esquema, el estudiante debe haber adquirido una suficiente comprensión del problema.

En cuanto al *tercer objetivo* de Cooper y Sweller, parece que enseñar de forma explícita a transferir los contenidos conocidos a los problemas nuevos, produciría mejoras en la resolución de los problemas matemáticos (Asch, 1969; Catrambone y Holyoak, 1989; Gick y Holyoak ,1980; Keane, 1989; y Ross, 1989). En cuanto a cómo hacerlo, autores como Salomon y Perkins (1989), señalan que se puede trabajar la transferencia de las dos formas siguientes:

a) Por un lado, promoviendo la *búsqueda de información hacia adelante*, que es cuando los estudiantes deben anticipar cómo hacer una abstracción para resolver el problema de forma exitosa, como por ejemplo, cuando se explican algunos contenidos de Física para explicar algunos contenidos de Álgebra, como pueden ser las ecuaciones de segundo grado;
b) Y, por el otro, promoviendo la *búsqueda de información hacia atrás*, que consiste en pedir a los estudiantes que hagan búsquedas independientes de problemas del mismo tipo, como cuando se pide a los estudiantes que piensen en problemas de su vida cotidiana que puedan resolver por medio de problemas de ecuaciones de segundo grado.

En ambos casos la mejora en la ejecución se produciría porque, al tratar de llevar a cabo una transferencia de lo conocido a lo desconocido, se desarrollarían una serie de capacidades cognitivas que son necesarias para mejorar la resolución de problemas, tales como las siguientes:

1) En primer lugar, se producirían mejoras en la propia capacidad del adolescente de hacer *mapas cognitivos que representaran de la forma más exacta posible la estructura profunda del problema*.

   Un estudio interesante que aporta evidencia sobre la influencia favorable de la transferencia en la capacidad del estudiante de hacer mapas cognitivos eficaces, es el de Maccini, P., Mulcahy, C. A. Wilson, M. G. (2007), en donde se hizo una revisión sistemática de distintos estudios en Matemáticas con alumnos que tenían dificultades en la asignatura desde 1995 hasta 2006. Los alumnos con dificultades en matemáticas, suelen cometer errores de procedimiento en la resolución de problemas, así como presentar dificultades a nivel cognitivo tanto para organizar la información, como para hacer uso útil de la información que almacenan en su memoria de trabajo y memoria a largo plazo. Esta situación de desventaja a nivel cognitivo, se reflejará en dificultades para comprender el cálculo básico y en la resolución de problemas (Geary, 2004; Miller y Mercer, 1997), cometiendo bastantes errores en los cálculos, necesitando más tiempo para resolver los problemas y haciendo uso de menos estrategias cognitivas que los alumnos que no presentan estas dificultades (Montague y Applegate, 2000). Los estudios que han mostrado el beneficio del entrenamiento en transferencia para la mejora de la elaboración de mapas cognitivos eficaces~~,~~ se han hecho tanto con estudiantes de primaria en problemas de suma y resta, obteniendo incluso una generalización de hasta 4 semanas (Jitendra y col, 1999); como en secundaria, en problemas de multiplicación y división (Jitendra y col, 2002; Xin y col, 2005). El método de trabajo en estos estudios incluía moldeamiento, práctica guiada, práctica independiente y retroalimentación correctiva, con el fin de instruir a los estudiantes a reconocer o a hacerse un mapa adecuado de los problemas, a trasladar la información relevante a una ecuación matemática, a averiguar los valores desconocidos y a comprobar la respuesta.

2) En segundo lugar, parece haber una mejora en la *capacidad del estudiante de ordenar la información relevante del problema, es decir, la información que debe tener en cuenta para resolver dicho problema, y esto produciría mejoras en la gestión de la información almacenada tanto en su memoria a corto plazo, como en su memoria largo plazo.*

El motivo es que es necesario que el estudiante ordene la información relevante de un problema nuevo cuando se le pide que lo clasifique e incluya en una tipología en función de los tipos de problemas que ya conoce, de manera que esté en condiciones de aplicar o elaborar el mapa cognitivo adecuado en función de dicha clasificación. La idea es que el estudiante adapte el mapa cognitivo aprendido al problema nuevo, por lo que no sirve una aplicación mecánica de un mapa ya conocido, sino que hay que hacer una revisión del mismo y esto obliga al estudiante a organizar la información de dicho problema nuevo. Esta mejora en ordenar la información del problema nuevo, consecuencia de pedir al estudiante que clasifique los problemas nuevos en tipologías de problemas ya conocidos, parece producir mejoras en la capacidad del estudiante de hacer transferencias de amplio alcance (Fuchs, 2004; y Jitendra y col, 1998).

Incluir en el método experimental la instrucción de clasificar los problemas nuevos en tipologías ya conocidas, mejoraría la retención por parte del estudiante de la información relevante de los problemas conocidos y la identificación de los aspectos comunes entre problemas que requieren métodos de solución similares. Esto supone una novedad con respecto a trabajos anteriores en donde sólo se entrenaba a los estudiantes a hacer transferencia próxima, y no lejana (Alonso-Tapia y Olea, 1997; Chi y col, 1981; Cummins, 1992; Hinsley, Hayes y Simon, 1977; Quilici y Mayer, 1996). El entrenamiento en transferencia lejana, produciría una mejora en la organización de la información de los problemas nuevos, que mejoraría la retención de la información relevante de los problemas conocidos, y la identificación de los aspectos comunes entre los problemas nuevos y los conocidos.

3) En tercer lugar, trabajos como el de Mayer (1995), concluirían que el entrenamiento explícito de las habilidades para hacerse un modelo de representación estratégico del problema, produciría un incremento *en la comprensión del estudiante del enunciado del problema.* En su estudio, este autor evaluó el número de fijaciones que estudiantes eficaces y no eficaces hacían sobre el problema y el grado de recuerdo que tenían después sobre la información relevante del problema. Parece que los estudiantes que hacían menos regresiones oculares era porque seguían un planteamiento estratégico para resolver el problema, y recordaban mejor el enunciado; y los estudiantes que hacían más regresiones, seguían una estrategia de translación directa, y recordaban el enunciado de memoria, basándose en números y en claves relacionales.

4) En cuarto lugar, parece que el entrenamiento en transferencia produciría una mejora en las *creencias positivas de los estudiantes sobre los problemas matemáticos y su propia capacidad de resolverlos, y que este tipo de creencias influirían de forma positiva en su capacidad de resolver problemas de la vida cotidiana.* La mejora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, se produce sobre todo cuando se amplía el entrenamiento en transferencia de la transferencia próxima a la transferencia lejana, ya que se insta a los estudiantes a que hagan esquemas más amplios que incorporarían más aspectos cambiantes y novedosos en los problemas y los harían más parecidos a los problemas de la vida real (Fuchs, 2004). En concreto, en este trabajo de Fuchs se hizo una ampliación del entrenamiento de transferencia próxima a transferencia lejana, para lo cual se diseñaron los problemas dentro del continuo de transferencia, con características que implicaban desde una menor hasta una mayor distancia con respecto al problema inicial. Se agrupó a los alumnos en un grupo de control, de transferencia próxima y de transferencia lejana. Los cambios en los problemas para el grupo de transferencia lejana fueron los siguientes:
   a) Los problemas diseñados para el *nivel de transferencia 1* sólo variaban en la historia incluida en el enunciado con respecto al problema conocido;
   b) Los problemas diseñados para el *nivel de transferencia 2*, tenían un formato/vocabulario o pregunta nuevos con respecto al problema conocido, al igual que los problemas en la condición de entrenamiento de transferencia próxima;
   c) Los problemas diseñados para el *nivel de transferencia* 3 incluían un elemento nuevo de información irrelevante, la combinación de dos tipos de problemas de forma nueva y posibles cambios en dos aspectos de transferencia con respecto al problema nuevo, que podrían ser en la apariencia/vocabulario o en la pregunta del problema;
   d) Y los problemas diseñados para *el nivel de transferencia 4,* incluían un nuevo formato –podían parecen un test comercial-, párrafos con información numérica y narrativa irrelevante, y una combinación de los cuatro tipos de

transferencia, es decir, cambios en la historia del enunciado, en el vocabulario, en la pregunta o en el formato del problema nuevo.

La diferencia entre transferencia próxima y lejana es la siguiente. La *transferencia próxima*, se da entre problemas que tienen pocas diferencias entre sí y se consigue simplemente con la práctica de resolver muchos ejercicios; y la *transferencia lejana* se da entre problemas que tienen muchas diferencias entre sí, no siendo suficiente con hacer prácticas para llevarla a cabo de forma correcta, ya que el adolescente debe aprender a hacer una abstracción deliberada de los principios que se aplican a los enunciados del problema nuevo y conocido y a formular adecuadamente las conexiones abstractas que hay entre ambos. Por medio de este proceso de abstracción y re elaboración del enunciado del problema nuevo, el adolescente podría "tomar conciencia" de la estructura profunda de dicho problema nuevo, y por tanto, mejorar su comprensión del mismo. El término "tomar conciencia" tiene el mismo significado que la palabra acuñada por Salomon y Perkins para describir este proceso de darse cuenta del significado real de un problema nuevo a la que llamaron "meta cognición" (Salomon y Perkins, 1989).

Los resultados de este trabajo de Fuchs confirmaron la hipótesis de que los estudiantes que habían recibido entrenamiento en transferencia lejana, lo hicieron mejor que los que habían sido entrenados para transferencia próxima y éstos mejor que los del grupo control. Por ello, se recomendaría la realización de un entrenamiento en transferencia lejana para lograr en los estudiantes una mejoría sustancial en la resolución de problemas Algebraicos.

En relación a *cómo debería ser un entrenamiento eficaz en dichas habilidades de transferencia lejana*, los trabajos consultados parecen haber llegado a las conclusiones que se indican a continuación.

En primer lugar, los trabajos indican que los problemas nuevos con los que se trabaje, deberían incluir un tipo de cambios con respecto al problema conocido que los haga parecer tan nuevos que se haga difícil identificar a qué tipología de problema conocido pertenece. Se trata de que los problemas nuevos tengan la apariencia de un problema de la vida real. Al existir esta distancia entre problemas, el estudiante debería elaborar un mapa cognitivo mucho más complejo y amplio para que sea aplicable al problema nuevo, cuya tipología se puede hacer muy difícil de identificar.

En segundo lugar, autores como Fuchs (2003) basándose en las sugerencias de investigadores como Schwartz y Bransford (1998), recomendarían hacer uso de un método en el cual se instruyera a los estudiantes de forma directa en el concepto y tipos de transferencia lejana –hacia adelante y hacia atrás-, como base teórica. Los adolescentes podrían ser instruidos para clasificar los problemas en base a sus aspectos superficiales y sobre la mejor forma de resolverlos. Se trataría de promover en el estudiante la toma de conciencia tanto de los tipos de cambios superficiales en que puede variar un problema nuevo sin que se altere su estructura o solución, transferencia hacia adelante; como en la identificación de los cambios superficiales de los problemas nuevos mientras están tratando de resolverlos, transferencia hacia atrás (Cooper y Sweller, 1987; y Salomon y Perkins, 1989). Esta toma de conciencia aumentaría la capacidad del estudiante de hacer transferencias lejanas entre dichos problemas, al ser más capaz de identificar los cambios superficiales en los problemas nuevos de forma que las estructuras conocidas sean más fácilmente reconocibles. El propiciar este tipo de trabajos en Matemáticas de toma de conciencia de los aspectos en los que coinciden los elementos conocidos y los nuevos, supone una aplicación de la línea de investigación importante que ya existe al respecto en el área de la comprensión lectora (por ejemplo, Borkowski, Weyhing, y Carr, 1988; Palincsar y Brown, 1984; Pearson y Dole, 1987).

En tercer lugar, los trabajos recomendarían que se hiciera todo lo posible para que el estudio se hiciera en una clase ordinaria, que el tratamiento tuviera una duración lo suficientemente larga en el tiempo y que se analizaran de forma independiente los resultados de los estudiantes en función de sus historias previas de logro, ya que parece que los estudiantes con bajo logro, tendrían más dificultades para hacer transferencias adecuadas (Cooper y Sweller, 1987; Fuchs y col., 1999; D. P. Mayer, 1998; Woodward Baxter, 1997). Todo esto incrementaría la validez externa del estudio.

En síntesis, parece que la investigación sugeriría que instruir a los estudiantes en habilidades de transferencia, produciría los efectos positivos siguientes en la resolución de problemas Algebraicos:

a) En las habilidades de transferir contenidos analógicos a partir de los problemas conocidos a los problemas nuevos del mismo tipo, entendiendo como contenido analógico un contenido de un problema conocido de la misma tipología que el problema nuevo el cual es similar a los contenidos del problema nuevo.
b) En la flexibilidad de las representaciones cognitivas que el estudiante hace sobre los problemas nuevos.
c) En la capacidad de generalización de las representaciones cognitivas que hace un adolescente sobre los problemas nuevos.
d) En la capacidad del estudiante de ir resolviendo problemas cada vez más complejos.
e) En la comprensión de problemas Algebraicos nuevos.
f) En las habilidades de resolución de problemas Algebraicos del adolescente.

Una limitación que se ha observado en los trabajos sobre transferencia y que también se encuentra en los trabajos de Fuchs (2003 a y b; y 2004), es que los resultados no ofrecen evidencia directa sobre el mecanismo cognitivo por el cual el tratamiento usado tendría un efecto superior; por lo que sería una dirección útil para futuras investigaciones según Taylor y Dionne (2000), sería examinar los efectos del entrenamiento, no sólo con medidas de transferencia, sino también con reportes verbales de los sujetos y con información retrospectiva para identificar de qué forma se produce dicha transferencia. Además, la mayoría de los trabajos han hecho un entrenamiento de la transferencia próxima y en estudiantes de primaria o con estudiantes de secundaria con dificultades de aprendizaje por lo que se haría necesario realizar más estudios que incluyeran una instrucción de transferencia lejana y con alumnos de secundaria con y sin dificultades de aprendizaje.

Debido a estos resultados, parecería necesario hacer más trabajos sobre la resolución de problemas algebraicos, que incluyeran un método de entrenamiento explícito de las habilidades de transferencia en los adolescentes para ver cuál es el efecto en la resolución de problemas (Fuchs, 2003, a y b y 2004, a y b). Y no solo entrenamiento explícito de las habilidades de transferencia, sino en combinación con el entrenamiento en autorregulación, ya que parece haber evidencia de un efecto conjunto de ambas variables superior con respecto a la influencia de dichas variables por separado en relación a la resolución de problemas (Fuchs, 2003 a y b; Jitendra y Hoff, 1996; Jitendra y colaboradores, 1998).

Otros trabajos en donde se ha encontrado evidencia empírica del efecto conjunto superior del entrenamiento en autorregulación y transferencia, ha sido en trabajos con adolescentes que debían resolver problemas de multiplicación y división (Jitendra, DiPippi y Perron-Jones, 2002; Jitendra, Hoff y Beck, 1999; ~~y~~ Xin, Jitendra y Beatline-Buchman, 2005). Estos trabajos recomiendan combinar el entrenamiento conjunto en autorregulación y transferencia, con reglas de resolución de problemas Algebraicos, con el fin de que no pueda atribuirse a esta variable el efecto final en la capacidad del estudiante de resolver problemas matemáticos.

Por lo tanto, los trabajos consultados sugerirían incluir en el método de instrucción un entrenamiento combinado de habilidades de autorregulación y transferencia en adolescentes con el fin de mejorar la ejecución de dichos adolescentes en la resolución de problemas Algebraicos. La cuestión es si *habría alguna otra variable que influyera en la resolución de dichos problemas Algebraicos que se debería tener en cuenta a la hora de aplicar el método educativo con el entrenamiento combinado en autorregulación y transferencia.*

1.7.5 La incidencia de la motivación en la resolución de problemas matemáticos en general y algebraicos en particular.

Según la investigación, sería posible influir en la motivación individual de los adolescentes de un grupo, introduciendo cambios en la estructura motivacional de la clase por medio de cambios en el patrón educativo del profesor (Alonso Tapia y Fernández Heredia, 2008; Alonso-Tapia y Moral-Bosch, 2010).

La teoría sobre la que se sustentan este tipo de trabajos, es que cada adolescente trae a clase una motivación individual de logro “per se” que puede ser (Elliot, 2005) : a) Motivación *orientada al aprendizaje*, cuando el estudiante tiene el objetivo de aprender, y considera el error como una ocasión más para dicho aprendizaje; b) Motivación *orientada al resultado*/*lucimiento*, cuando el estudiante tiene el objetivo de conseguir calificaciones positivas que le pongan incluso por encima de otros; o, c) Motivación orientada a la *evitación*, cuando el objetivo del estudiante es evitar por todos los medios posibles enfrentarse al fracaso. En esta motivación individual de logro, es posible influir a partir de la modificación de algunas pautas docentes en el llamado "clima motivacional de clase". El valor de este clima motivacional se puede evaluar a partir del Cuestionario de Evaluación del Clima Motivacional de la Clase (CMC-Q), (Alonso-Tapia y Fernández, 2008), y los cambios que los profesores deberían hacer en sus patrones de actuación docente para lograr una mejora en dicho clima motivacional de aprendizaje, deberían ser los que están incluidos en la Figura 1.8.

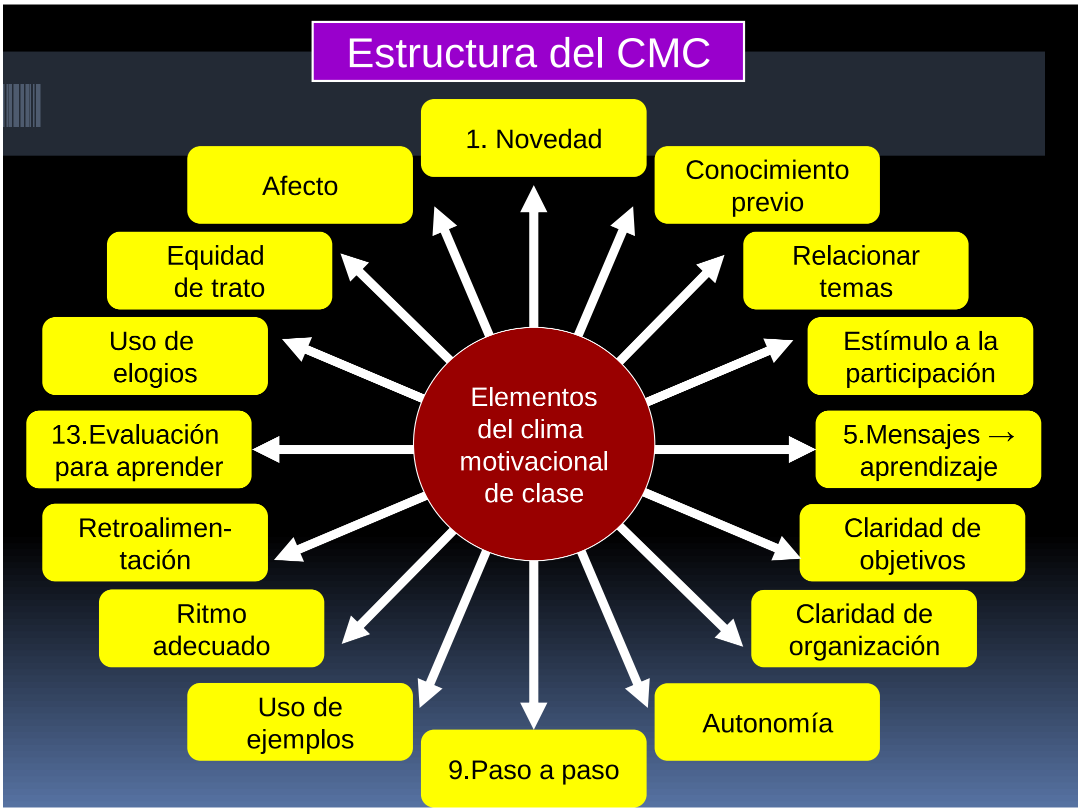


Figura 1.8. Estructura del C.M.C. (Alonso-Tapia y Fernández, 2008)

Estos cambios en los patrones docentes, suponen la constitución de un CMC de aprendizaje, el cual influirá de forma positiva en que los adolescentes adopten una motivación individual de aprendizaje con respecto a la asignatura que sea, en este caso, matemáticas.

Según los trabajos consultados, parece que lograr un CMC de aprendizaje, mejoraría en los estudiantes la motivación individual de aprendizaje y con ella, en variables tales como las siguientes, en este caso aplicadas a las matemáticas en general y al álgebra en particular:

- Capacidad de darse cuenta de los propios errores.
- Capacidad de corregir los propios errores.
- Mejora de la comprensión de los contenidos.
- Mejora de la resolución de ejercicios relacionados con los contenidos.
- Mejora del interés y valoración que se da al contenido dado.
- Mejora de la valoración que se da a dicha actividad, etc.

Por todo ello, es preciso tener en cuenta la variable CMC a la hora de valorar la incidencia de un método educativo en el aula, en este caso, un método de entrenamiento de las habilidades de autorregulación y transferencia para la resolución de problemas algebraicos. Dicho método, se ha elaborado teniendo en cuenta los supuestos teóricos que se indican a continuación.

1.8. Componentes fundamentales y condiciones de aplicación del programa

Según la investigación consultada, elaborar un cuaderno de problemas algebraicos para entrenar la autorregulación y que al mismo tiempo promueva la transferencia entre dichos problemas~~;~~ implica hacer uso de una estrategia de enseñanza que ayude a los estudiantes a desarrollar diferentes conexiones entre las distintas ideas matemáticas, más que a promover una mejora en la fluidez procedimental (Rakes, Valentine y McGatha, 2010). Debido a esto, el grupo de problemas de la presente tesis, debe apoyarse en las interrelaciones de los distintos campos matemáticos directamente relacionados con el Álgebra, tales como la Probabilidad y la Geometría. Además, en el diseño de los problemas, se han tenido en cuenta las tres áreas en que está dividida el Álgebra de acuerdo con Kieran (2004):

(1) Construir e interpretar los objetos algebraicos, como puede ser el significado de un dibujo, actividad que implica *generar* representaciones algebraicas.

(2) Simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones y desigualdades y manipular expresiones, actividades que implican *transformar* representaciones algebraicas.

(3) Resolver problemas, probar modelos matemáticos, aplicar patrones de generalización, o analizar relaciones entre variables, actividades implican buscar la estrategia adecuada para resolver el problema~~.~~

Con el mismo objetivo también se deben tener en cuenta las recomendaciones siguientes en la aplicación del método de enseñanza:

a) La forma de dar la explicación a los adolescentes tiene que ser graduada, de manera que se vaya incrementando el nivel de dificultad desde contenidos más concretos a contenidos más abstractos y complejos y por tanto, más difíciles para los estudiantes. Para ello, se hará uso en la explicación de contenidos de la secuencia concreto- semi concreto-abstracto (Butler y col., 2003; Cass y col., 2003; Maccini y Hughes, 2000; Maccini y Ruhl, 2000; Witzel y col., 2003). Esta secuencia sería un encuadre favorecedor de la posterior enseñanza directa de las habilidades de transferencia, ya que favorece la comprensión de los contenidos.
b) Se debe incluir en el método una instrucción explícita de habilidades de autorregulación, por medio de la cual se enseñará a los adolescentes a ejercer un control sobre el propio proceso de resolución de problemas.
c) Se debe incluir en el método una instrucción explícita de habilidades de transferencia, por medio de la cual se enseñará a los estudiantes a hacer esquemas cognitivos lo bastante complejos como para representar la estructura profunda de los problemas nuevos, que les facilite hallar la solución a dichos problemas (Xin y col, 2005).
d) Se debe incluir en el método, la instrucción explícita de buscar y encontrar la estructura profunda- de significados- de los problemas nuevos con el fin de facilitar la comprensión de dichos problemas (Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Gentener y Landers, 1985; Gholson y col, 1990; Novick, 1988, 1992; Reed, 1987; Ross, B.H., 1984, 1987; Silver, 1981).
e) Los problemas deberán estar estructurados de forma que se favorezca la transferencia de contenidos entre problemas de la misma tipología de la doble forma siguiente:

   e.1) Por un lado, los problemas nuevos variarán con respecto a los problemas conocidos en su estructura superficial (Chen, 1999), la cual debe cambiar desde un nivel de mayor a menor parecido con la estructura superficial del problema conocido del mismo tipo, aunque manteniendo la misma estructura profunda o de significados. Los adolescentes deberán empezar resolviendo problemas con estructuras superficiales lo más próximas entre sí y continuar con problemas cada vez más distantes. Asimismo, se incrementará progresivamente el nivel de dificultad para discernir a qué tipología de problema pertenece el problema nuevo, e.2). Y por el otro, los problemas deberán ser isomórficos, por lo que al tener una estructura superficial distinta pero igual estructura profunda, facilitará el reconocimiento posterior de problemas de la misma tipología (Gholson, Eymard, Long, Morgan y Leeming, 1988; Gholson, Dattel, Morgan y Eymard, 1989; Pierce y Gholson, 1994).

f) La “cultura social” o de interacciones sociales de la clase, tenderá a favorecer los aprendizajes matemáticos, por lo que tendrá las siguientes características (Ball, 1991a; Chazan, 2000; Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001; Cobb, Yackel y Wood, 1989; Hershkowitz y Schwartz, 1999; Lampert, 1990, 2001; Schoenfeld, 1994; Yackel, 2001):

- Se darán las explicaciones de los contenidos con detenimiento, asegurándose por medio de preguntas que todos los estudiantes los hayan comprendido;
- Se dará una justificación de todas las afirmaciones que se hagan;
- Se argumentarán los contenidos enseñados junto con argumentaciones de los estudiantes;
- Se favorecerá que los estudiantes sean lo más autónomos posible con respecto a la tarea de resolver problemas;
- Y, por último, se enseñará a los adolescentes normas socio-matemáticas, como por ejemplo, lo que hay que tener en cuenta en una explicación o justificación matemática o las implicaciones a nivel matemático de las distintas soluciones que puedan darse a un problema (Arcavi, Kessel, Meira y Smith, 1998; Goos, 2004; Wood, Williams y McNeal, 2006; Yackel y Cobb, 1996).

g) Las condiciones metodológicas de aplicación, serán las siguientes (Jitendra, 1999):

- Partir del nivel de conocimientos previos de los estudiantes para realizar las explicaciones a partir de los mismos;
- Empezar con la enseñanza de habilidades y conceptos más simples para a continuación ir enseñando habilidades y conceptos más complejos;

- Hacer revisiones diarias de las tareas que hay que hacer;
- Explicar de forma clara lo que tienen que hacer los adolescentes para lograr los objetivos de intervención diarios;
- Hacer prácticas guiadas de lo que los estudiantes tienen que hacer para resolver los problemas hasta que sean capaces de aplicarlos ellos de forma autónoma (Rosenshine, 1995; Rosenshine y Stevens, 1986; Slavin, Stevens y Madden, 1988).
- A estas condiciones, se añadirán las siguientes, señaladas por ~~de~~ Swanson (2003):
  - Dar la instrucciones de forma grupal primero y a continuación contestar posibles dudas a nivel individual;
  - Dar instrucciones a los estudiantes para que adopten un enfoque estratégico para resolver los problemas;
  - Y verbalizar en voz alta por parte del profesor las reglas de resolución de problemas, a modo de moldeamiento hasta que los estudiantes sepan lo que tienen que hacer y por qué.
- Y por último, se añaden las condiciones metodológicas siguientes propuestas por los autores que se indican:
  - Poner ejemplos suficientes y apropiados a la explicación que se está dando (Cawley y col, 1996);
  - Hacer suficiente número de prácticas como para facilitar en los adolescentes el automatismo de las tareas que deben hacer (Resnick y Ford, 1981);
  - Hacer las revisiones apropiadas de cómo resolver los problemas con un problema tipo que no desaparezca nunca totalmente, pero que será siempre sistemáticamente revisado (Dempster, 1991)
  - Dar retroalimentación inmediata para que el estudiante pueda corregir el error en el momento en que lo comete (Stein y col, 1997; Werts, Wolery, Holcombe y Gast, 1995) .

h) Y por último, el programa se aplicará de forma que fomente una estructura de CMC de aprendizaje en el aula (Alonso Tapia y Fernández Heredia, 2008).

Por supuesto, la enseñanza de habilidades de autorregulación y transferencia para mejorar la resolución de problemas algebraicos se hará utilizando problemas basados en los contenidos curriculares del curso correspondiente. El fin es que el entrenamiento sea lo más eficaz posible.

SEGUNDA PARTE

ESTUDIO EXPERIMENTAL

2.1. Planteamiento e hipótesis

El presente estudio se ha llevado a cabo debido a una serie de motivos que se indican a continuación.

En primer lugar, debido a la dificultad que tienen los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas. Así, las matemáticas suele ser una asignatura percibida como de alta dificultad, y muestra una alta casuística de dificultades, bloqueos y errores a la hora de resolver este tipo de problemas (Callejo, 2003).

En segundo lugar, según los trabajos consultados (Champione y col., 1989; Lester, 1989; Schoenfeld, 1987, 1992; English 1992a; 1992c, Stiphout, 2011) el darse cuenta de lo que uno hace cuando está resolviendo un problema – monitorizar, evaluar y supervisar el mismo-, parece que mejora la capacidad de resolver dicho problema. Asimismo, parece que incidir en las habilidades de transferencia lejana del estudiante, mejora su capacidad de resolver problemas, no sólo en clase, sino también en su vida cotidiana (Fuchs, 2004).

En tercer lugar, se ha elegido una muestra de adolescentes con edades comprendidas entre los 14-16 años. El motivo es porque no hay constancia documental de trabajos sobre la incidencia de las habilidades de autorregulación y transferencia sobre la resolución de problemas algebraicos en este nivel. Y, además, porque en el curso de tercero de secundaria es el momento en el que el álgebra, aunque mantiene su nivel básico de secundaria, empieza a complicarse para dar paso a los problemas más complejos de la etapa post obligatoria. (Stiphout, 2011).

En cuarto lugar, era necesario mejorar los resultados obtenidos en un primer estudio sobre la influencia de las habilidades de autorregulación y transferencia en la resolución de problemas algebraicos debido a limitaciones en el método usado para evaluar la autorregulación, problema que se ha subsanado en el presente estudio Con este fin dicho método se ha elaborado siguiendo las orientaciones de trabajos previos al que se presenta, como por ejemplo, de Alonso Tapia y Olea, (1997), Fuchs (2004),o Xin y col. (2005).

En quinto lugar, según los estudios revisados (Alonso Tapia, y Ruiz, 2014), cada estudiante utiliza un estilo de autorregulación que suele conllevar darse una serie de automensajes a través de los cuales maneja – de forma adecuada o no -, las emociones positivas o negativas que pueden favorecer sus actividades de aprendizaje de las matemáticas o interferir tanto en las mismas como en su propia motivación.

Ahora bien, se ha encontrado que cuando los estudiantes perciben una mejora en su autorregulación, suelen atribuir dicha mejora al trabajo del profesor, siempre y cuando dicho trabajo refleje patrones de enseñanza que configuren un clima motivacional de clase (CMC) orientado al aprendizaje. Esto quiere decir que es mucho lo que puede hacer u un profesor para favorecer la motivación y el aprendizaje de sus alumnos (Ames, 1992). Por esta razón, con el fin de asegurar las mejores condiciones para incrementar tanto la motivación como el estilo de autorregulación se ha buscado crear en las clases de álgebra un CMC orientado al aprendizaje.

En sexto lugar, estudios consultados (Wayne, 2003, Fernández, 2005; Miró, 2006) han subrayado el efecto moderador de las variables capacidad lectora y conocimientos previos en los aprendizajes, razón por la que era necesario valorar el papel de estas variables como moderadoras del efecto de la instrucción.

Apoyándonos en las ideas sintetizadas en las líneas anteriores, se formularon las siguientes *hipótesis*:

Primera, se esperaba que hubiera una relación significativa entre nuestro programa de entrenamiento y un incremento en las habilidades de autorregulación.

Segunda, se esperaba que hubiera una relación significativa entre nuestro programa y las habilidades de transferencia (capacidad de resolución de problemas algebraicos).

Tercera, se esperaba que los conocimientos previos de los adolescentes, ejercieran un efecto modulador positivo de la efectividad de nuestro entrenamiento, es decir, un incremento en la percepción de estilo de autorregulación de aprendizaje, y en la capacidad de resolución de problemas algebraicos.

Cuarta, se esperaba que la percepción del CMC de la clase de álgebra ejerciera un efecto modulador positivo de la efectividad de nuestro entrenamiento, es decir, un incremento en la percepción de estilo de autorregulación de aprendizaje, y en la capacidad de resolución de problemas algebraicos.

Quinta, se esperaba que la capacidad lectora ejerciera un efecto modulador en la efectividad de nuestro entrenamiento, es decir, un incremento en la percepción de estilo de autorregulación de aprendizaje, y en la capacidad de resolución de problemas algebraicos.

En síntesis, se esperaban dos cosas:

1) Que las variables moderadoras conocimientos previos, percepción del CMC de matemáticas, y la capacidad de comprensión lectora de los adolescentes ejercerían una influencia moduladora en la resolución de problemas algebraicos.

2) Que nuestro entrenamiento, ejercería una influencia superior al de la enseñanza habitual, tanto en la percepción de estilo de autorregulación de aprendizaje, como en las habilidades de transferencia (resolución de problemas algebraicos).

En la Figura 2.1 se presenta un esquema de los efectos estudiados.

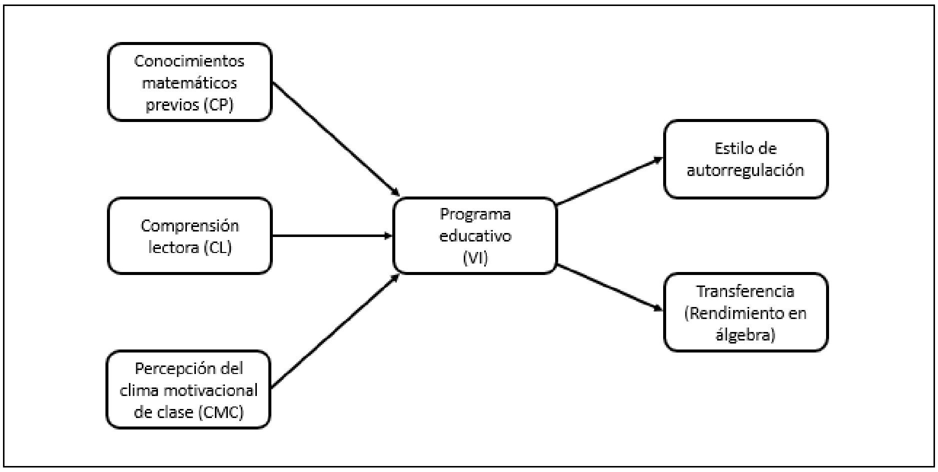


Figura 2.1. Variables moderadoras y variable independientes que afectan a la autorregulación y transferencia (rendimiento en matemáticas).

2.2. Método

2.2.1. Muestra

Un total de 142 adolescentes de tercero de secundaria obligatoria –77 mujeres y 65 varones -estudiantes de un centro público de secundaria de la Comunidad de Madrid, seleccionados por criterios de conveniencia, participaron en este estudio. A todos se les explicó cuál era el objetivo último de la investigación y se les animó a participar voluntariamente. No recibieron ninguna compensación por su participación. Los participantes de asignaron de forma aleatoria a las seis condiciones experimentales. El rango de edad de la muestra iba desde los 14 hasta los 17 años (M=14.56; SD = 0.668). La distribución de la muestra se hizo según indica la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Distribución de la muestra

Condición	Grupo	Número de sujetos		Totales	
		Varones	Mujeres		
Experimental	3ºA	9	13	22	73
	3ºB	11	9	20	
	3ºE	14	17	31	
Control	3ºC	8	13	21	69
	3ºD	9	13	22	
	3ºF	14	12	26	
	Total	77	65	142	

2.2.2. Materiales

2.2.2.1. Instrumentos para evaluar las variables moderadoras

*Cuestionario de Clima Motivacional de la Clase (CMCQ) (*Alonso-Tapia y Fernández, 2008*).* El CMCQ se aplicó con la finalidad de determinar si el grado en que los alumnos percibían el clima motivacional de clase como orientado al aprendizaje moderaba el efecto del tipo de entrenamiento recibido, dado que se ha encontrado que en la medida en que el CMC tiene tal orientación mejora la motivación (Alonso-Tapia y Fernández, 2008) y la autorregulación (Alonso-Tapia, y Ruiz, 2014). Consta de 32 ítems agrupados de dos en dos en 16 variables que se muestran en la Tabla 2.2. Estas variables se combinan para proporcionar una única puntuación que mide el grado en que el CMC se orienta al aprendizaje. Los items se contestan mostrando el grado de acuerdo en una escala Likert de cinco puntos que van desde 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo). Los índices de consistencia interna encontrados en distintos estudios oscilan entre .90 /.93. La prueba se recoge en el Apéndice 1.

Prueba de Lectura. *Batería CL-4* (Alonso-Tapia y otros, 1997). Esta prueba se aplicó para comprobar si la capacidad de comprensión lectora moderaba el efecto del tipo de entrenamiento recibido. Se seleccionó esta prueba por dos razones. La primera es que la comprensión lectora en la misma se evalúa a partir la comprensión de las distintas facetas de las que depende la misma, facetas que corresponde a las preguntas recogidas en la Tabla 2.3. La segunda es que puede aplicarse por partes, lo que permite acortar el tiempo de evaluación manteniendo una fiabilidad adecuada (α_{total} = .84; $\alpha_{\text{parte utilizada}}$ = .71). Por esta razón sólo se aplicaron tres textos con 30 items (10 por texto) correspondientes a la parte con mayor consistencia interna. La prueba se recoge en el Apéndice 2.

Tabla 2.2. Pautas docentes evaluadas por el CMCQ con ítems ejemplo.

CMCQ Variables
El profesor usa situaciones novedosas. Este profesor presenta a menudo información nueva que hace que aumente nuestro interés
El profesor evalúa los conocimientos precios. Este profesor explora lo que sabemos sobre un tema antes de explicarlo.
El profesor relaciona diferentes temas. Este profesor trata de ayudarnos a relacionar las nuevas ideas con lo que ya sabemos.
El profesor fomenta la participación. A este profesor le gusta que participemos, nos escucha y responde a nuestras preguntas.
Los mensajes de este profesor orientan al aprendizaje. A este profesor le gusta que disfrutemos aprendiendo cosas nuevas.
Los objetivos de aprendizaje están claros. (-) Este profesor cambia a cada momento y esto nos llena de confusión.
La actividad está bien organizada. En esta clase las instrucciones para las tareas están clara por lo que sabemos qué es lo que tenemos que hacer.
El profesor promueve la autonomía. (-) Este profesor nunca nos da libertad para elegir cómo o con quién trabajar.
El profesor enseña a trabajar paso a paso. Este profesor explica paso a paso y eso hace que sea fácil entenderle.
El profesor usa muchos ejemplos. (-) Este profesor casi nunca pone ejemplos y eso hace que sea difícil entenderle.
El profesor lleva un ritmo adecuado. Este profesor se adapta a nuestro ritmo de aprendizaje dándonos tiempo para pensar.
El profesor proporciona retroalimentación que ayuda a aprender de los errores. Este profesor te hace sentir que puedes aprender de los errores.
El profesor evalúa "para" ayudar a aprender. (-) Este profesor te pone exámenes que tienen poco que ver con lo que se ha hecho al trabajar en clase.
El profesor elogia los progresos de los alumnos. Este profesor elogia nuestros esfuerzos por aprender siempre que tiene ocasión.
El profesor trata a los alumnos con equidad. (-) Este profesor presta más atención a los alumnos más inteligentes.
El profesor se preocupa por cada alumno. (-) hay pocos alumnos que hagan preguntas porque este profesor es muy distante y no suele ayudar.

Tabla 2.3. Preguntas a las que responden las diferentes subescalas de la prueba de Comprensión Lectora (Alonso-Tapia y otros, 1997)

Criterio final de comprensión

- *Idea principal* (IP): ¿Conoce el sujeto qué es lo más importante que comunica el autor?
- *Intención del autor* (IN): ¿Conoce cuál es la intención que persigue el autor al comunicarse?
- Competencia a la hora de comprender la *comunicación* (IP + **1N).**

Determinantes inmediatos de la comprensión

- *Estructura textual* (CES): ¿Conoce qué estrategias emplear para identificar la IP en función del tipo de texto?

Organizadores textuales:

- *Tiempo verbal* (TV) ¿Comprende el significado e implicaciones de los tiempos verbales?
- *Mantenimiento de la referencia* (MR) ¿Comprende y conoce adecuadamente cómo y cuándo las repeticiones y el uso de pronombres y expresiones anafóricas ayudan a mantener la referencia o, por el contrario la obstaculizan?
- *Comprensión de las conectivas* (CON) ¿Comprende el significado de las distintas partículas conectivas?

Comprensión de la relación texto-contexto:

- Tipo de documento (DOC) ¿Es capaz de identificar el tipo de documento al que pertenece un texto?

Conocimiento de los contenidos temáticos del texto:

- Contenidos temáticos: CTM ¿La representación que el sujeto se hace de los conceptos e ideas del texto es la adecuada?

Prueba de conocimientos matemáticos previos a la aplicación del programa. Esta prueba, elaborada “ad hoc” para este estudio e incluido en el Apéndice 3, contiene una serie de problemas correspondientes a los contenidos previos que se consideraba necesario que los adolescentes hubieran asimilado, a modo de base teórica, para comprender y asimilar los contenidos algebraicos del curso de tercero de secundaria obligatoria. Sus contenidos tienen que ver con: a) Números enteros; b) números racionales; c) decimales y fracciones; d) proporciones y potencias; e) reglas de jerarquía de operaciones y uso de paréntesis; f) Problemas aritméticos o de álgebra elemental

2.2.2.2. Instrumentos para evaluar las variables dependientes

Cuestionario de autorregulación elaborado "ad hoc" (CAR). Se trata de un cuestionario con preguntas abiertas para valorar el grado en que los estudiantes habían mejorado – o adquirido- un estilo de autorregulación facilitador del aprendizaje, una vez finalizada la aplicación del programa de entrenamiento. Su contenido se presenta en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4. Preguntas del cuestionario de autorregulación (CAR)

1) *Señala con una cruz (X) los pasos que has dado para resolver los problemas del 4 al 12*:

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece

- Procuro leer y entender cada frase del enunciado.
- Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.
- He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.
- Otro:

Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.

- He anotado los datos que me da el problema
- He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos
- He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)
- Otro:

Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema

- He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.
- Otro:

Paso 4. RESUELVO el problema

- He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.
- He escrito la solución al problema.
- He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.
- Otro:

2) *¿Te han resultado fáciles o difíciles de resolver los problemas anteriores? ¿Por qué?*

3) *¿Había contenidos que no se habían dado? Describe cuáles y qué has hecho para resolver esos problemas.*

4) *Por último, ¿has aumentado tu confianza en resolver problemas algebraicos? Explica los motivos.*

La corrección del punto 1 se hace asignando 0.25 puntos por cada una de las acciones correspondientes a los pasos 1, 2 y 4, y 0.50 por cada una de las acciones del paso 3, con lo que el máximo de puntos posibles es 4. El total se divide entre 4 para expresar la puntuación como proporción del máximo posible. En el caso de las preguntas de los puntos 2, 3 y 4 simplemente se anota 1 o 0 en función de que el alumno perciba facilidad o no, de que haya sido capaz de enfrentarse a problemas o no, y de que haya experimentado incremento de confianza o no. En el Apéndice 11 se incluye la rúbrica utilizada para la corrección.

Cuestionario de mensajes autorregulatorios de la emoción y la motivación (CMA, EMSRQ en la publicación) (Alonso-Tapia, Panadero y Ruiz, 2014). Este cuestionario consta de 20 ítems que evalúan cinco tipos de automensajes utilizados para autorregular las emociones, mensajes que se relacionan entre sí del modo que se muestra en la Figura 2, configurando dos estilos de autorregulación: a) *autorregulación orientada al aprendizaje* (α = .84), que incluye las escalas "Autorregulación orientada a la ejecución" (α = .72), "Regulación positiva de la motivación" (α = .70)y "Orientación al proceso de actuación" (α = .70), y b) *Autorregulación orientada a la ejecución-evitación* (α = .77) que incluye las escalas "Autorregulación negativa del estrés" (α = .79), "Autorregulación orientada a la evitación" (α = .69) *y* "Autorregulación orientada a la ejecución" (α = .72), que forma parte de los dos estilos. El alumno debe señalar el grado de acuerdo con el ítem en una escala de cinco puntos, desde Los items se contestan en una escala de 5 puntos en los que hay que señalar el grado de acuerdo desde 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo). Los índices de consistencia interna encontrados en distintos estudios oscilan entre .90 y .93. Se incluye en el Apéndice 4.

Prueba de transferencia de conocimientos algebraicos (PT). El objetivo de esta prueba es evaluar la capacidad de transferir a nuevos problemas algebraicos las habilidades de solución de problemas adquiridas a lo largo del programa. Incluye un total de 12 problemas, tres por cada tipo de problemas trabajados. Son problemas abiertos que se corrigen mediante los criterios que se presentan en el Apéndice 8.

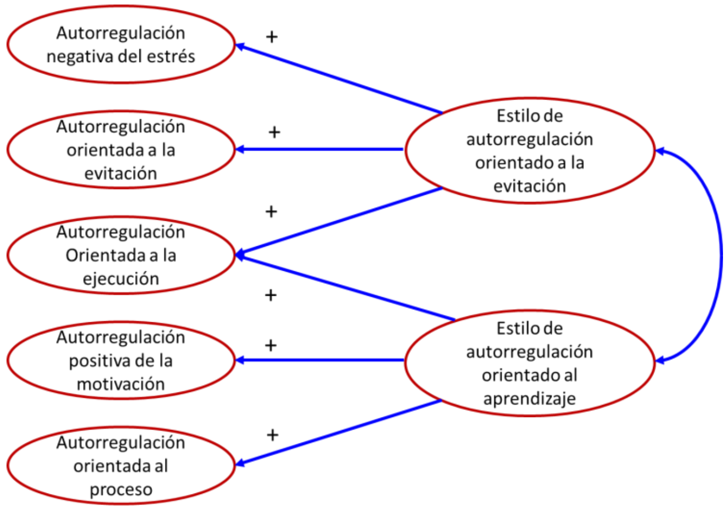


Figura 2.2. Escalas y tipos de estilos de autorregulación (EMSRQ) (relaciones esperadas en el modelo de autorregulación de motivación y volición)

2.2.2.3. Instrumentos usados para la intervención.

Cuaderno de problemas para el entrenamiento.

Nuestro método de entrenamiento incluía una relación de 28 problemas algebraicos diseñados para el programa, que permitían entrenar las estrategias de solución de los mismos y, en especial, la autorregulación y la transferencia. Tenían una estructura tanto de respuesta abierta como de opción múltiple, por entender que podía haber estudiantes que funcionaran mejor –o peor- con cualquiera de estas dos opciones. Estaban ordenados en función de su dificultad estructural, de modo que fuese posible ir adquiriendo la capacidad de transferir las habilidades aprendidas gradualmente, primero a problemas de estructura muy similar a los trabajados y, segundo, a problemas de estructura diferente (Fuchs, 2003a, 2004b; y Ross, 1989).

Los contenidos sobre los cuales se elaboraron los problemas (ver Apéndice 6) fueron los siguientes:

(1)Identificación de un problema algebraico.

Con respecto a este contenido, se trataba de fomentar en el adolescente una comprensión del álgebra, de forma que fuera capaz de identificar los aspectos básicos de este contenido en problemas nuevos.

(2) Monomios.

El motivo de elegir este contenido fue porque los aspectos incluidos en los problemas de monomios - razonamiento sobre una incógnita, forma de anotar los datos, resolución numérica e interpretación del problema-, constituían una base importante para la resolución de problemas más complejos.

(3) Polinomios.

Se eligió este contenido, ya que los polinomios incluyen varios datos desconocidos. La forma de anotar los datos y trabajar con ellos hasta dar con la solución, prepara al estudiante para trabajar con auténticas incógnitas.

(4) Sistemas de ecuaciones.

Este fue el contenido seleccionado más complejo. En el mismo, ya se incluyen verdaderos datos desconocidos, que se podían referir a un número entero, variable o a otra incógnita. No se incluyeron problemas más complejos por espacio de tiempo de aplicación del programa.

Esquema para la autorregulación. Consiste en un conjunto de preguntas elaboradas "ad hoc" para instruir a los adolescentes en el uso de las habilidades de autorregulación durante el entrenamiento, preguntas que se presenta en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5. Cuestionario de autorregulación durante el entrenamiento

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	☐
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	☐
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	☐
Paso 2. ORGANIZO la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	☐
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	☐
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	☐
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	☐
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	☐
He escrito la solución al problema.	☐
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	☐

Antes de la resolución de los problemas, se daban a los estudiantes las instrucciones de que señalaran con una cruz (X) cuáles de los pasos incluidos en la tabla daban conforme iban resolviendo el problema. Se escogió este procedimiento de instrucción sobre la base de la evidencia presentada por Panadero, Alonso-Tapia y Huertas (2012). Asimismo, se les recordó que no era obligatorio seguir todos los pasos en cada tipo de problema

Se llevaba a cabo el entrenamiento en autorregulación cada vez que el estudiante hacía uso de dicho cuestionario como guía para aplicar las habilidades de auto eficacia, y auto monitorización mientras estaba resolviendo el problema. La investigadora iba hablando con cada alumno cuando finalizaba el ejercicio, con el fin de ir comprobando qué habilidades de autorregulación había puesto en marcha y dándole instrucciones sobre cómo debía aplicar dichas habilidades en los problemas posteriores.

Cuestionario para evaluar el progreso en el aprendizaje de la autorregulación (EVPAR). Es un cuestionario elaborado "ad hoc" para valorar el grado en que los adolescentes van adquiriendo las habilidades de autorregulación durante el entrenamiento. Se presenta en la Tabla 2.6. Se incluye al finalizar cada uno de los problemas en todas las sesiones de entrenamiento.

Tabla 2.6. Preguntas abiertas de autorregulación incluidas al final de cada sesión de problemas

Las preguntas incluidas al final de cada uno de los problemas son las siguientes (extraído de Alonso Tapia, 2012):

A) *Para los problemas con alternativas de respuesta:*

1. Expresa con tus propias palabras lo que te ha pedido el problema.
2. ¿En qué te has fijado para averiguar qué alternativa era la correcta?
3. ¿Qué es lo que más difícil te ha resultado al resolver este problema?

B) *Para los problemas sin alternativas de respuesta*:

1. Expresa con tus propias palabras lo que te ha pedido el problema.
2. ¿En qué te has fijado en el problema para saber cuál era la respuesta correcta?
3. ¿Has hecho bien la anotación Algebraica que te pedía el problema?
4. ¿Has resuelto las operaciones de forma adecuada?
5. ¿Qué es lo que más difícil te ha resultado al resolver este problema?

Póster con reglas de resolución de problemas (adaptado de Montague, 2003).

Con la finalidad de que todos los estudiantes participantes, tanto de la condición experimental como de la condición control, conocieran una forma óptima de resolver los problemas algebraicos, se les explicaron una serie de reglas sobre resolución de problemas algebraicos sintetizadas a partir del trabajo de Montague (2003). Para apoyar la explicación se elaboró un póster con dichas reglas que estuvo expuesto en el aula de los tres grupos experimentales durante todo el experimento. (Puede verse en la Tabla 2.7).

Tabla 2.7. Reglas de resolución de problemas (Montague, 2003, 2006)

Paso 1. QUÉ TIPO DE PROBLEMA ES

LEER- Lee el problema para entenderlo.

Si no lo entiendes, léelo otra vez.

PARAFRASEAR- Vuelve a explicar, a partir de la información relevante, el problema con tus propias palabras.

Paso 2. ORGANIZA LA INFORMACIÓN CON UN ESQUEMA

VISUALIZAR- Visualiza el problema en un dibujo o diagrama.

Haz un dibujo o esquema que muestre las relaciones entre las partes del problema.

Paso 3. HAZ UN PLAN PARA RESOLVERLO

HIPOTETIZAR- Haz un plan para resolverlo, decidiendo cuántos pasos y operaciones incluir en dicho plan.

Paso 4. Resuelve el problema y haz las comprobaciones pertinentes

ESTIMAR- Haz un cálculo de la respuesta. Para ello, debes:

- Comprobar y redondear los números.
- Resolver el problema "de cabeza".
- Calcular cuál podrá ser la respuesta.

CALCULAR- Haz los cálculos aritméticos necesarios para resolver.

Recuerda hacer las operaciones en el orden correcto.

COMPROBAR- Asegúrate de que lo has hecho todo bien. Para ello:

- Comprueba si los cálculos son correctos.
- Si la respuesta es congruente con el enunciado.

Además, con el objetivo de que todos los participantes tuvieran delante dichas reglas durante todo el experimento, se fotocopió dicho póster y se les repartió a todos los estudiantes. La idea era facilitar a todos los participantes una comprensión suficiente de las habilidades de resolución de problemas algebraicos y que esta variable no ejerciera un efecto modulador diferencial entre los alumnos de las dos condiciones.

Póster con reglas para la autorregulación. El entrenamiento de las habilidades de autorregulación, adaptado del procedimiento S.A.C.

Tras explicar a los alumnos cómo podía regular el modo en que resolvían los problemas, con el objetivo de facilitarles la asimilación de las habilidades de autorregulación se creó un póster con las reglas a seguir para regular el proceso de solución de problemas, póster que estuvo expuesto en la clase de los tres grupos experimentales durante todo el experimento. (Puede verse en la Tabla 2.8) Estas reglas, adaptadas del procedimiento S.A.C. (Say, Ask, Check- Di, Pregunta y Comprueba) de Montague (2003, 2006), ampliaban las que se presentaban en el póster con las reglas de solución que recibían inicialmente.

Tabla 2.8. Póster con reglas para el entrenamiento de la *autorregulación* para resolver problemas algebraicos (adaptado de Montague, 2003)

- ***Paso 1. ENCUENTRA EL TIPO DE PROBLEMA***

¿He leído y entendido cada frase?, ¿Hay algunas palabras cuyo significado tenga que preguntar?

¿Qué debería buscar en un problema nuevo para identificar si es del mismo tipo de problemas que ya conozco?

¿He leído y me he explicado el problema para saber si es una variante de un tipo de problema ya conocido?

¿He buscado el tipo de asociación entre dos dimensiones?

¿El problema implica un tipo de estamento del tipo "Si… entonces" que corresponda con dos pares de asociaciones?

- ***Paso 2. ORGANIZA LA INFORMACIÓN CON EL DIAGRAMA DEL PROBLEMA NUEVO***

¿He hecho todo el dibujo, he hecho una representación del problema?

¿He escrito los niveles de las dos dimensiones en el diagrama?

A continuación, ¿He escrito una ecuación?, ¿He escrito los términos de la ecuación?

¿He escrito los números dados por los dos pares de asociaciones en el diagrama?

¿He escrito un "?" para el número desconocido?

- ***Paso 3. HAZ UN PLAN PARA RESOLVERLO***

¿He transformado la información del diagrama en una frase o ecuación matemática?

- ***Paso 4. RESUELVE EL PROBLEMA***

¿He averiguado el número desconocido en la frase o ecuación matemática?

¿He escrito la respuesta completa?

¿He comprobado si la respuesta tenía sentido?

2.2.3. Procedimiento

El programa se aplicó en clases naturales a todos los participantes de las dos condiciones experimentales. Tuvo una duración total de dos meses. Antes de la aplicación del programa de entrenamiento todos los adolescentes completaron las pruebas que evaluaban las variables moderadoras, así como el EMSRQ. Posteriormente, durante ocho semanas se aplicó el programa de entrenamiento. Finalmente, tras el entrenamiento se aplicó de nuevo el EMSRQ y la prueba de transferencia de conocimientos algebraicos.

2.3 Resultados

2.3.1. ANOVA de las diferencias en las variables moderadoras

La Tabla 2.9 muestra las medidas de los grupos experimental y control en las variables moderadoras, y la Tabla 2.10 los resultados del ANOVA de las diferencias entre ambos grupos en las mismas. Como puede comprobarse, sólo las diferencias en la percepción del CMC son significativas, siendo superior la media del grupo experimental a la del control, razón por la que solo esta medida se utilizará como covariable en el resto de los análisis.

Tabla 2.9 Medias y desviaciones típicas en las variables moderadoras

		Conocimiento previo en matemáticas		Comprensión lectora		Percepción del clima motivacional de clase	
Grupo	N	Media	Dt	Media	Dt	Media	Dt
Control	67	5.26	1.44	4.45	1.48	106.84	21.41
Experimental	75	5.28	1.35	4.18	1.41	118.07	16.23
Total	142	5.27	1.39	4.31	1.44	112.77	19.61

Tabla 2.10 Anova de las diferencias en las variables moderadoras

Variables	Fuente de variación	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
CMAT-Previos	Inter-grupos	.01	1	.013	.007	.935
	Intra-grupos	272.91	140	1.949		
	Total	272.92	141			
Comprensión Lectora.	Inter-grupos	2.64	1	2.643	1.262	.263
	Intra-grupos	293.23	140	2.095		
	Total	295.87	141			
Clima Motivacional de clase	Inter-grupos	4463.47	1	4463.470	12.55	.001
	Intra-grupos	49759.86	140	355.428		
	Total	54223.33	141			

2.3.2. ANCOVAS de las diferencias en los distintos indicadores de Autorregulación.

La autorregulación evaluada mediante el EMSRQ tiene dos factores de segundo orden que corresponden a “Estilos de autorregulación” y cinco de primer orden que corresponden a los tipos de mensajes autorregulatorios empleados por los alumnos, todos los cuales constituyen indicadores de la capacidad de autorregulación. En este caso, el cuestionario se pasó antes y después del entrenamiento, por lo que se hizo un análisis de covarianza de medidas repetidas utilizando la *ocasión* como variable intragrupo y la *condición* como variable intergrupo. La Tabla 2.11 muestra las medidas de los grupos experimental y control en los siete indicadores, las Tablas 2.12 a 2.18, los resultados de cada ANCOVA, y las Figuras 2.3 a 2.9, los cambios en las medias de cada variable en las dos condiciones experimentales.

Tabla 2.11 Medias y desviaciones típicas en los indicadores de autorregulación pre-y post entrenamiento del cuestionario EMSRQ.

Variable	Condición	N	Pre-entrenamiento		Post entrenamiento	
			Media	Dt	Media	Dt
ESTILO de autorregulación orientado a la EVITACIÓN	Control	67	33.31	8.82	35.52	9.60
	Experimental	75	38.17	6.89	34.83	6.05
	Total	142	35.88	8.20	35.15	7.90
ESTILO de autorregulación orientado al APRENDIZAJE	Control	67	35.21	6.22	36.63	6.88
	Experimental	75	39.85	7.14	39.99	7.12
	Total	142	37.66	7.09	38.40	7.18
Autorregulación negativa del estrés	Control	67	11.31	4.06	11.33	4.01
	Experimental	75	11.67	3.77	11.03	3.03
	Total	142	11.50	3.90	11.17	3.52
Autorregulación orientada a la evitación	Control	67	9.61	3.37	10.64	3.84
	Experimental	75	11.52	3.14	10.32	2.78
	Total	142	10.62	3.37	10.47	3.31
Autorregulación orientada a la ejecución	Control	67	12.39	3.66	13.55	4.20
	Experimental	75	14.99	2.90	13.48	3.13
	Total	142	13.76	3.52	13.51	3.66
Autorregulación positiva de la motivación	Control	67	11.40	3.09	11.37	3.28
	Experimental	75	12.83	3.11	13.28	2.77
	Total	142	12.15	3.17	12.38	3.16
Autorregulación orientada al proceso	Control	67	11.42	2.97	11.70	3.33
	Experimental	75	12.04	3.29	13.23	2.87
	Total	142	11.75	3.15	12.51	3.18

2.3.2.1 ANCOVA del ESTILO de autorregulación orientado a la evitación

Los resultados recogidos en la Tabla 2.12 muestran, en primer lugar, que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control, tienen un efecto significativo sobre la variable condición. Aun así, el efecto de esta es significativo: la orientación del grupo experimental a la evitación es superior a la del control. Sin embargo, en línea con la finalidad buscada por la intervención, la interacción ocasión por condición es altamente significativa y va en la dirección esperada. Como puede verse en la Tabla 2.11 y en la Figura 2.3, el grado en que los alumnos del grupo experimental utilizan un estilo de autorregulación orientado a la evitación disminuye significativamente, mientras que los alumnos del grupo control tienen a utilizarlo cada vez en mayor medida.

Tabla 2.12 ANCOVA. ESTILO de autorregulación orientado a la evitación.

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
ESTILO de autorregulación orientado a la EVITACIÓN	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	3.11	1	3.11	.13	.719	.001
		Ocasión*Condición	468.48	1	468.48	19.60	.000	.124
		Error (Ocasión)	3322.34	139	23.90			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	733.31	1	733.31	7.61	.007	.052
		Condición (experimental - control)	602.66	1	602.66	6.25	.014	.043
		Error	13386.28	139	96.30			

2.3.2.2. ANCOVA del ESTILO de autorregulación orientado al aprendizaje.

Los resultados recogidos en la Tabla 2.13 muestran que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control, tienen un efecto significativo sobre la variable condición. Aun así, el efecto de esta es significativo: la orientación del grupo experimental al aprendizaje es superior a la del control. En este caso, sin embargo, en contra de lo esperado, la interacción ocasión por condición no es significativa.

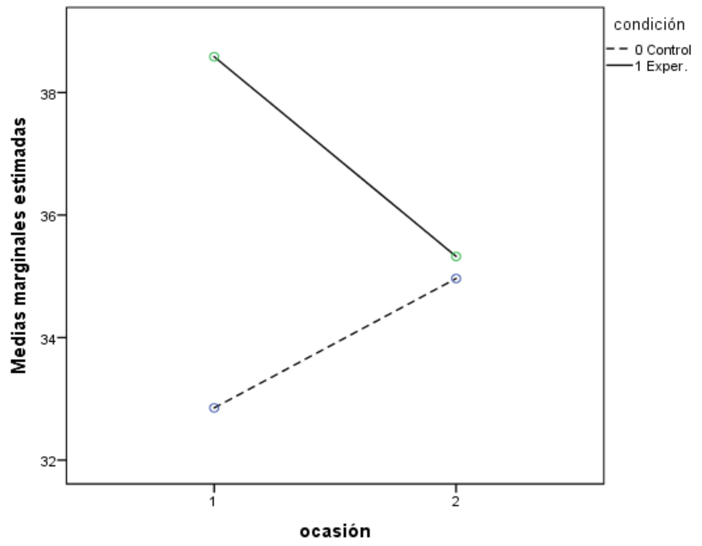


Figura 2.3. Cambio en ESTILO de Autorregulación centrado en la evitación

Tabla 2.13 ANCOVA. ESTILO de autorregulación orientado al aprendizaje.

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
ESTILO de autorregulación orientado al APRENDIZAJE	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	15.38	1	15.38	.81	.368	.006
		Ocasión*Condición	18.90	1	18.90	1.00	.318	.007
		Error (Ocasión)	2621.14	139	18.85			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	364.03	1	364.03	4.94	.028	.034
		Condición (experimental - control)	717.11	1	717.11	9.74	.002	.065
		Error	10233.60	139	73.62			

Como puede verse en la Tabla 2.11 y en la Figura 2.4, el grado en que los alumnos del grupo experimental utilizan un estilo de autorregulación orientado a la evitación se mantiene, lo mismo que el grado en que lo utiliza el grupo de control. Puede que por lo que se refiere a esta variable, se haya producido un cierto efecto techo.

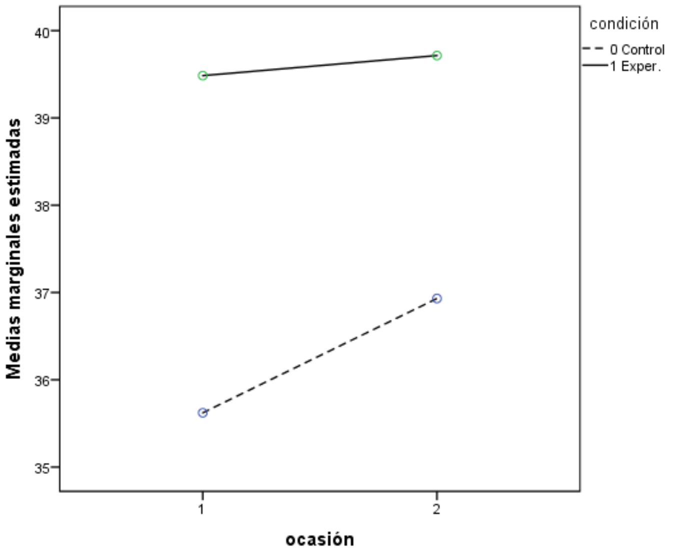


Figura 2.4. Cambio en ESTILO de Autorregulación orientado al aprendizaje

2.3.2.3. ANCOVA de los mensajes que implican autorregulación negativa del estrés.

Los resultados recogidos en la Tabla 2.14 muestran, como ocurría en el caso del *estilo* orientado a la evitación, del que esta subescala es un indicador, que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control, tienen un efecto significativo sobre la variable condición: el grupo experimental supera al control. Una vez descontado este efecto, la condición no tiene un efecto significativo.

Tabla 2.14 ANCOVA. Autorregulación negativa del estrés

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
Autorregulación negativa del estrés	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	1.51	1	1.51	.26	.607	.002
		Ocasión*Condición	8.24	1	8.24	1.45	.231	.010
		Error (Ocasión)	790.47	139	5.68			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	160.96	1	160.96	7.62	.007	.052
		Condición (experimental - control)	14.80	1	14.80	.70	.404	.005
		Error	2933.70	139	21.10			

Así mismo, aunque en línea con la finalidad buscada por la intervención la Figura 2.5 y la tabla 2.11 muestran que esta orientación disminuye en el grupo experimental, los datos la interacción ocasión por condición muestran que esta interacción no llega a ser significativa, como puede verse en la Tabla 2.14.

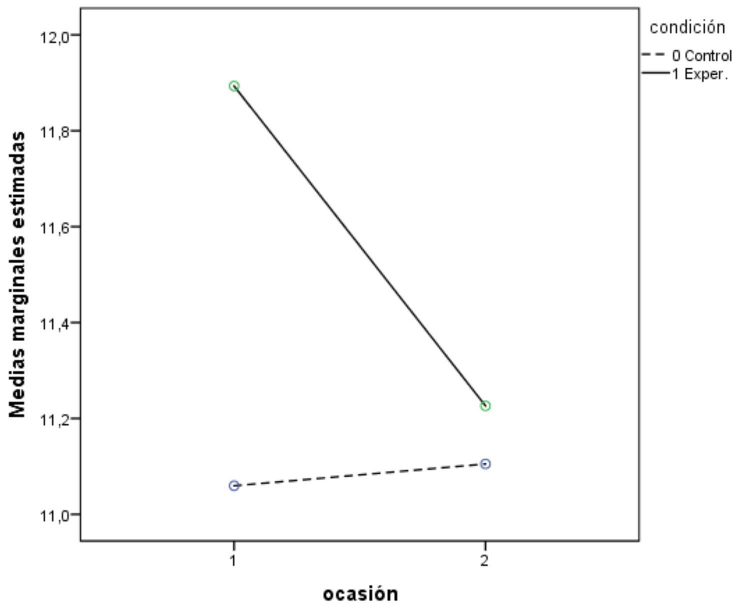


Figura 2.5. Cambio en Autorregulación negativa del estrés

2.3.2.4. ANCOVA de los mensajes autorregulatorios orientados a la evitación

Los resultados recogidos en la Tabla 2.15 muestran, en primer lugar, que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control, tienen un efecto significativo sobre la variable condición. Aun así, el efecto de esta es significativo: el grado en que el grupo experimental declara darse mensajes enfocados a la evitación es superior a la del control. Sin embargo, en línea con la finalidad buscada por la intervención, la interacción ocasión por condición es altamente significativa y va en la dirección esperada. Como puede verse en la Tabla 2.11 y en la Figura 2.6, el grado en que los alumnos del grupo experimental utilizan un estilo de autorregulación orientado a la evitación disminuye significativamente, mientras que los alumnos del grupo control tienen a utilizarlo cada vez en mayor medida.

Tabla 2.15. ANCOVA. Mensajes autorregulatorios orientados a la evitación

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
Mensajes autorregulatorios orientados a la evitación	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	14.05	1	14.05	3.11	.080	.022
		Ocasión*Condición	61.78	1	61.78	13.70	.000	.090
		Error (Ocasión)	626.60	139	4.50			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	238.35	1	238.35	15.41	.000	.100
		Condición (experimental -control)	117.10	1	117.10	7.57	.007	.052
		Error	2150.03	139	15.46			

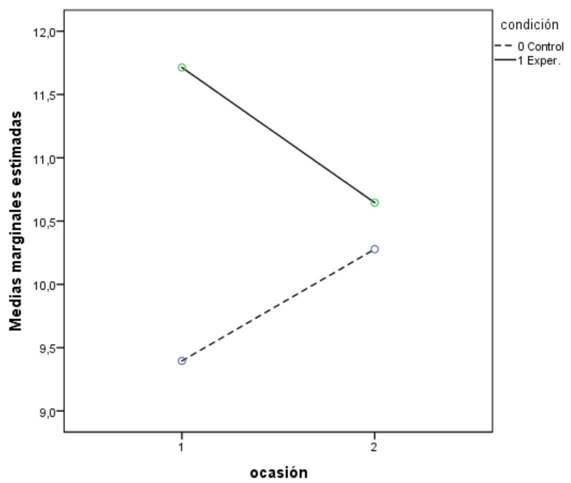


Figura 2.6. Cambio en mensajes autorregulatorios orientados a la evitación

2.3.2.5. ANCOVA de los mensajes autorregulatorios orientados a la ejecución

Los resultados recogidos en la Tabla 2.16 muestran en este caso que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control no tienen un efecto significativo en las diferencias en la "mensajes orientados a la ejecución en función de la condición. Sin embargo, son significativos tanto el efecto de esta como el de la interacción ocasión por condición, yendo los resultados en la condición esperada. Como puede verse en la Tabla 2.11 y en la Figura 2.7, el grado en que los automensajes de los alumnos del grupo experimental se orientan a la ejecución disminuye significativamente, mientras que los alumnos del grupo control tienen a utilizarlos cada vez en mayor medida.

Tabla 2.16 ANCOVA. Mensajes autorregulatorios orientados a la ejecución

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
Autorregulación orientada a la ejecución	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	.56	1	.56	.12	.722	.001
		Ocasión*Condición	119.08	1	119.08	26.54	.000	.160
		Error (Ocasión)	623.69	139	4.48			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	1.09	1	1.09	.05	.815	.000
		Condición (experimental -control)	97.61	1	97.61	4.88	.029	.034
		Error	2779.12	139	19.99			

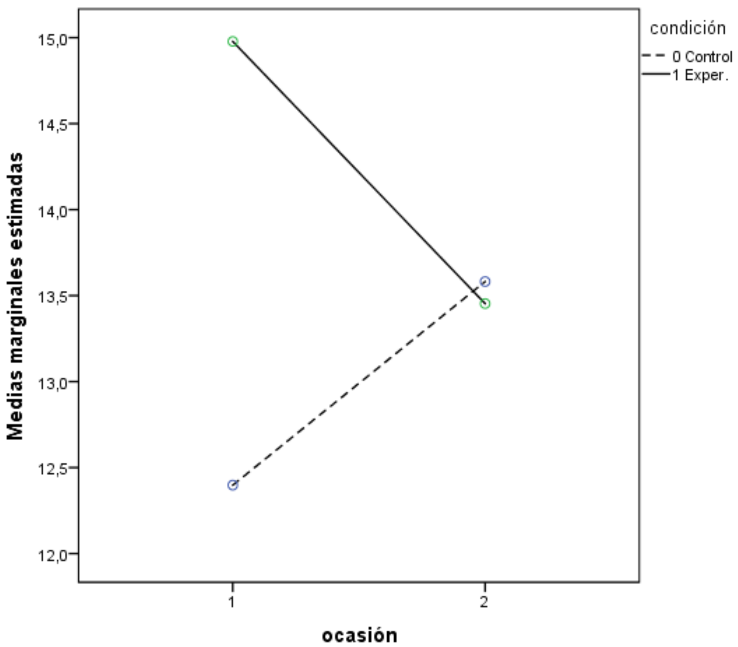


Figura 2.7. Cambio en mensajes autorregulatorios orientados a la ejecución.

2.3.2.6. ANCOVA de los mensajes que implican autorregulación positiva de la motivación.

Los resultados recogidos en la Tabla 2.17 muestran que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control, tienen un efecto significativo sobre la variable condición. Aun así, el efecto de esta es significativo: el grado en que el grupo experimental reconoce darse mensajes que favorecen positivamente la motivación es superior al grado en que lo reconoce el control. En este caso, sin embargo, en contra de lo esperado, la interacción ocasión por condición no es significativa. Como puede verse en la Tabla 2.11 y en la Figura 2.8, los resultados se mantienen a lo largo de la intervención.

Tabla 2.17 ANCOVA. Mensajes que implican autorregulación positiva de la motivación

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
Autorregulación positiva de la motivación	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	1.54	1	1.54	.30	.579	.002
		Ocasión*Condición	4.94	1	4.94	.99	.321	.007
		Error (Ocasión)	693.33	139	4.98			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	77.37	1	77.37	5.77	.018	.040
		Condición (experimental - control)	118.74	1	118.74	8.86	.003	.060
		Error	1862.01	139	13.39			

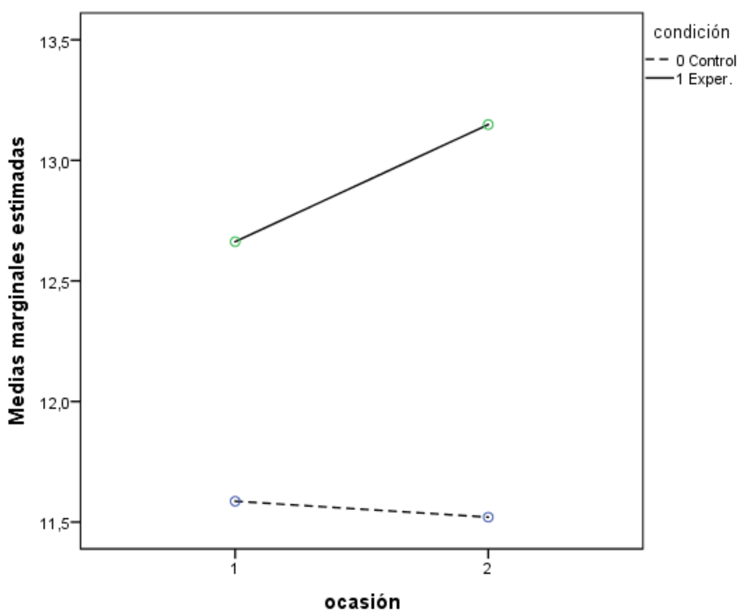


Figura 2.8. Cambio en Mensajes que implican autorregulación positiva de la motivación.

2.3.2.7. ANCOVA de los mensajes que implican autorregulación enfocada en el proceso.

Los resultados recogidos en la Tabla 2.18 muestran que las diferencias en la covariable CMC, en la que el grupo experimental percibía un clima motivacional de clase significativamente más orientado al aprendizaje que el grupo control, tienen un efecto significativo sobre la variable condición. El efecto de esta no es significativo, pero sí lo es la interacción ocasión por condición. Como puede verse en la Tabla 2.11 y en la Figura 2.9, en línea con lo esperado el grado en que el grupo experimental reconoce darse mensajes enfocados a la mejora del proceso de solución es superior al grado en que lo reconoce el control.

Tabla 2.18. ANCOVA. Mensajes que implican autorregulación enfocada en el proceso

Variable	Comparación	Fuente de varianza	SC	GL	MC	F	p	η^2
Autorregulación orientada al proceso	Intrasujetos (Post – Pre)	Ocasión	11.78	1	11.78	2.59	.109	.018
		Ocasión*Condición	18.85	1	18.85	4.14	.044	.029
		Error (Ocasión)	631.49	139	4.54			
	Intersujetos (Experimental-Control)	CMC (Covariable)	85.32	1	85.32	5.90	.016	.041
		Condición (experimental - control)	36.02	1	36.02	2.49	.117	.018
		Error	2009.53	139	14.45			

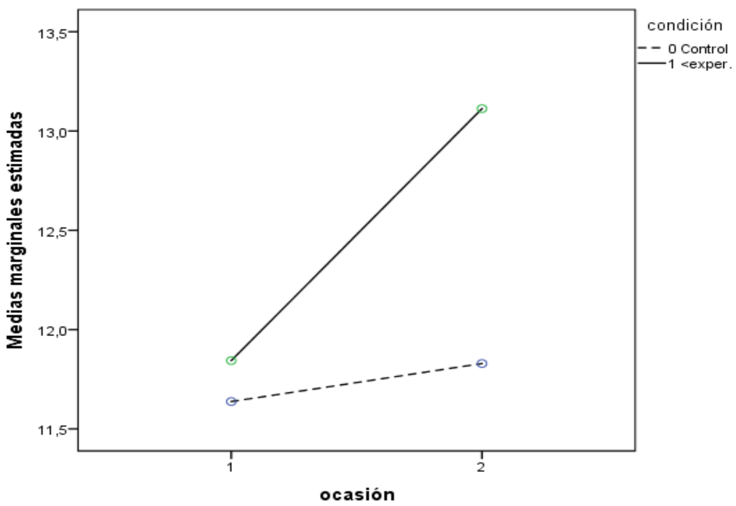


Figura 2.9. Cambio en mensajes que implican autorregulación enfocada en el proceso.

2.3.2.8. *Resultados del Cuestionario de Autorregulación (C.A.R).*

En la Tabla 2.19 se presentan las medias correspondientes a la proporción de alumnos que, de acuerdo con el cuestionario de autorregulación, han utilizado las distintas estrategias que requiere el proceso de autorregulación cognitiva, y en la Tabla 2.20, el análisis de las diferencias entre las medias de tales proporciones. Como puede comprobarse, la diferencia entre los dos grupos no es significativa por lo que se refiere a la búsqueda del tipo de problema (tipología), pero los estudiantes del grupo experimental superan a los del control en la organización, planificación y ejecución de las tareas algebraicas.

Tabla 2.19 Uso de distintas estrategias de regulación del proceso de solución

Variable	Condición	N	Media	Dt
Busca Tipo de problema	Control	67	.94	.239
	Experimental	75	.97	.162
Organiza	Control	67	.72	.454
	Experimental	75	.93	.251
Planifica	Control	67	.54	.502
	Experimental	75	.71	.458
Ejecuta	Control	67	.66	.478
	Experimental	75	.84	.369

Tabla2.20 Significación de diferencias en el uso de estrategias de regulación del proceso de solución

Variable	Diferencia de medias	t	GL	Sig.
Tipología	-,033	-,973	140	,332
Organiza	-,217	-3,571	140	,000
Planifica	-,169	-2,101	140	,037
Resuelve	-,183	-2,571	140	,011

En la Tabla 2.21 se presentan las medias correspondientes a la proporción de alumnos que, de acuerdo con el cuestionario de autorregulación, han percibido cambios -facilidad y confianza- en relación con la propia capacidad de autorregulación cognitiva, y en la Tabla 2.22, el análisis de las diferencias entre las medias de tales proporciones. Como puede comprobarse no hay diferencias significativas en la proporción de alumnos consideran que las tareas les resultan más fáciles. No obstante, sí las hay, a favor del grupo experimental, en el grado de confianza con respecto a la posibilidad de resolver problemas algebraicos, y en la percepción de la mejora las habilidades de autorregulación.

Tabla 2.21.Percepción de cambios en capacidad de autorregulación

Variable	Condición	N	Media	Dt
Facilidad	Control	67	.01	.122
	Experimental	75	.07	.251
Confianza	Control	67	.09	.288
	Experimental	75	.36	.483
Mejora general	Control	67	.12	.327
	Experimental	75	.39	.490

Tabla 2.22.Significación de diferencia en la percepción de cambios en capacidad de autorregulación

Variable	Diferencia de medias	t	GL	Sig.
Facilidad	-.052	-1.532	140	.128
Confianza	-.270	-3.992	140	.000
Mejora general	-.267	-3.775	140	.000

2.3.3. ANCOVAS de las diferencias en la transferencia de conocimientos algebraicos.

La Tabla 2.23 recoge las medias y desviaciones típicas de los alumnos de las dos condiciones en la prueba de *transferencia de conocimientos algebraicos,* y la Tabla 2.24, los resultados del análisis de covarianza. Como puede comprobarse, los resultados muestran que las diferencias en la covariable CMC no tienen un efecto significativo en la prueba de transferencia. Sin embargo, en línea con lo esperado, el efecto de la condición es altamente significativo: los sujetos del grupo experimental puntúan significativamente por encima de los del grupo control, como puede verse en la Tabla 2.23 y en la Figura 2.10.

Tabla 2.23. Medias y desviaciones típicas en la prueba de transferencia de conocimientos algebraicos

Grupo Control (N: 67)		Grupo experimental (N: 75)		Total (N: 142)	
Media	Dt	Media	Dt	Media	Dt
2,24	1,33	3,66	1,08	2,99	1,40

Tabla 2.24. ANCOVA de las diferencias en la prueba de transferencia de conocimientos algebraicos

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.	η^2
CMC (Covariable)	,08	1	,08	,056	,814	,000
Condición	64,39	1	64,39	43,72	,000	,239
Error	204,72	139	1,473			

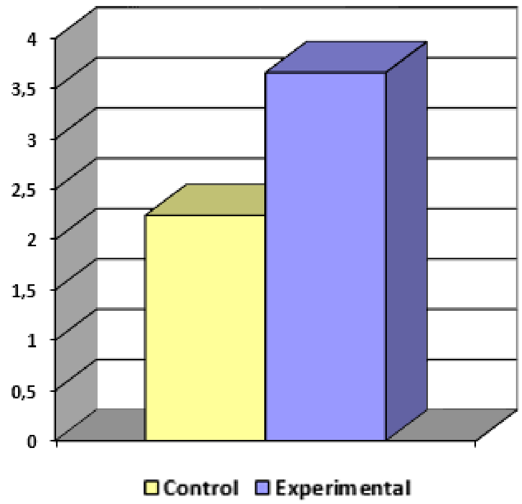


Figura 2.10. Rendimiento en transferencia de conocimientos algebraicos

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

2.4.1. Síntesis del problema, y objetivos.

El presente trabajo de investigación se empezó a realizar con el objetivo de ayudar a los adolescentes a mejorar su rendimiento en la resolución de problemas algebraicos. Se habían revisado los resultados de muchos de los trabajos realizados en el área de la resolución de problemas matemáticos, y se constató que en la práctica educativa, no se estaban teniendo en cuenta algunas de las conclusiones a las que dichos trabajos estaban llegando. De hecho, parecía que el número de adolescentes con problemas en el aprendizaje de las matemáticas, no sólo no había disminuido, sino que iba aumentando.

Debido a los hechos señalados nos planteamos si quizá las conclusiones a las que habían llegado dichas investigaciones, no se aplicaban en realidad a la población de adolescentes que existe en la actualidad en los centros educativos de secundaria en España, o al menos, en la Comunidad de Madrid (C.A.M.). Así, nos interesaba obtener información con respecto a en qué medida aquello que los trabajos consultados aportaban como facilitador del aprendizaje y asimilación del Álgebra en secundaria, podría servir también a los adolescentes de un centro público de la C.A.M.

En concreto, habíamos descubierto que las habilidades del adolescente para autorregular su propio trabajo mientras está resolviendo un problema algebraico, así como su capacidad de transferir información desde problemas que ya conoce a los nuevos podría incrementar su eficacia en la ejecución de esta tarea. Por lo tanto, nos preguntamos qué procedimientos podrían contribuir a mejorar la capacidad de autorregulación y transferencia a la hora de resolver problemas algebraicos. De encontrar una respuesta positiva a esta pregunta, los profesores podrían integrar los procedimientos desarrollados en su práctica educativa.

2.4.2. Estructura de la intervención.

La estructura del planteamiento experimental diseñado tas la revisión teórica para dar respuesta a las preguntas planteadas se resume en la Figura 3.1.

La primera pregunta cuya respuesta nos interesaba conocer era si nuestro programa realmente producía una mejora significativa en las habilidades de autorregulación de nuestros adolescentes. Con este fin se utilizaron dos cuestionarios, uno destinado evaluar el tipo de mensajes que los estudiantes de dan para autorregular la motivación y la emoción (EMSRS) mientras trabajan en la solución de problemas y otro (CAR) destinado a evaluar en qué medida realizan las actividades autorregulatorias propias de la solución de problemas (identificación del tipo de problema, organización, planificación y ejecución).

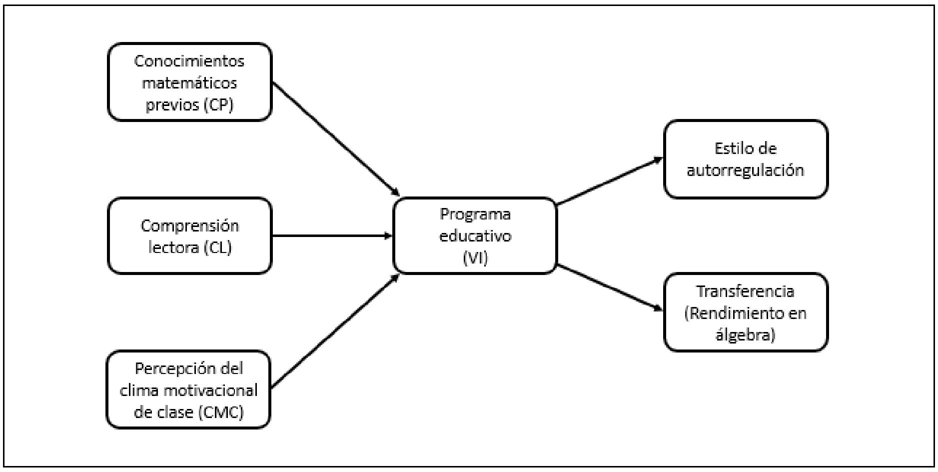


Figura 3.1. Variables moderadoras y variable independientes que afectan a la autorregulación y transferencia (rendimiento en matemáticas).

A la hora de hacer los análisis de los resultados del primer cuestionario queríamos averiguar en concreto si los automensajes de carácter autorregulatorio que los alumnos se daban en relación con las emociones que experimentaban durante la ejecución de los problemas habían mejorado cono fruto del programa estando más orientados al aprendizaje (SR orientada al aprendizaje), y menos a la evitación (SR orientada a la evitación).

Los resultados mostraron que nuestro programa producía una diminución en el *estilo* de autorregulación orientado a la evitación en los adolescentes del grupo experimental. Esto implicaba que, al finalizar nuestro programa, los estudiantes participantes ya no tenían tantas trabas para ponerse a hacer problemas algebraicos. De hecho, algunos de los participantes, verbalizaban que ya no tenían tanto temor de hacer mal los problemas. Sin embargo, los estudiantes del grupo control continuaban dándose mensajes de evitación frente a las tareas algebraicas al finalizar el experimento. En cuanto al *estilo* orientado al aprendizaje, no hubo diferencias significativas.

Si en vez de examinar los estilos considerados globalmente, se examinan los tipos de mensajes de autorregulación que se estaban dando los adolescentes participantes mientras resolvían los ejercicios algebraicos, los resultados muestran que no hay diferencias significativas en los mensajes que implican autorregulación negativa del estrés, uno de los indicadores del SR orientado a la evitación, ni en la autorregulación positiva de la motivación, indicador del SR orientado al aprendizaje. Sin embargo, si es significativa la diferencia a favor del grupo experimental en el caso de los mensajes que implican orientación al proceso (aumentan) y en los que implican orientación a la ejecución (disminuyen). Lo que estos resultados permiten concluir es que el sistema de entrenamiento diseñado mejora los elementos del proceso de autorregulación relacionados con la motivación y la emoción, aunque no en todos los casos los resultados hayan sido significativos.

En resultado que merece la pena comentar y que puede explicar por qué en algunos casos los cambios han sido significativos es el efecto moderador significativo del Clima Motivacional de Clase (CMC). Ocurre que los alumnos del grupo experimental percibían en mayor medida que los del control que el CMC favorecía el aprendizaje. Si ya partían de un contexto favorecedor en alto grado, es posible que se haya creado un efecto techo que en haya impedido un mayor efecto en la autorregulación de los mensajes relacionados con la motivación y la emoción.

Para valorar el modo en que los alumnos, además de autorregular sus emociones y motivación mediante los mensajes que se dan, autorregulan el proceso de solución de problemas cuando trabajan con problemas de álgebra, se analizaron los resultados obtenidos en el cuestionario CAR. Como se exponía en el apartado dedicado al análisis de los resultados, la diferencia entre los dos grupos no es significativa por lo que se refiere a la búsqueda del tipo de problema (tipología), pero los estudiantes del grupo experimental superaron a los del control en la organización, planificación y ejecución de las tareas algebraicas. Parece, pues, que el programa de entrenamiento, que incluía el uso sistemático de guiones de autoevaluación a lo largo de las sesiones, ha facilitado la interiorización de un modo de pensar beneficioso para los alumnos en relación con tres de las cuatro fases del proceso de autorregulación evaluadas.

Asimismo, probablemente como resultado de la percepción señalada, los resultados han puesto de manifiesto que se dado un incremento significativo en los participantes del grupo experimental respecto a los del grupo control en la propia confianza en cuanto a resolver los problemas algebraicos y en la percepción general de mejora en la capacidad de resolverlos, si bien no se ha encontrado esa diferencia en la percepción de la facilidad de la tarea.

La segunda pregunta a la que se deseaba encontrar respuesta era comprobar si nuestro método producía mejoras en las habilidades de transferencia de los estudiantes participantes. Con este fin los problemas incluidos en el programa de entrenamiento se habían elaborado todos y cada uno con sumo cuidado, teniendo en cuenta una tipología básica dentro del álgebra, con el fin de facilitar dicha transferencia.

Debido a la estructuración de nuestros problemas - cuyo nivel de transferencia final consistía en realidad en resolver problemas de la vida diaria -, pensábamos que dicha transferencia lejana se iba a poder asimilar y comprender por parte de los adolescentes. En relación con esta hipótesis los resultados han puesto de manifiesto que los adolescentes de los grupos experimentales lograron una mejora significativa en sus capacidades de transferir la información conocida no sólo a problemas nuevos muy similares a los que ya conocían, sino incluso los referidos a la vida cotidiana.

En síntesis, a nivel general, nuestro entrenamiento ha producido mejoras tanto en el estilo de autorregulación del adolescente cuando está llevando a cabo la tarea de resolver ejercicios algebraicos, como en su capacidad para transferir información a partir de los problemas conocidos a los problemas nuevos.

2.4.3. Características de nuestro programa como instrumento de enseñanza del álgebra.

Dado que la intervención ha sido en términos generales efectiva, merece la pena examinar con algún detalle las características de la intervención para captar sus aspectos claves y poder introducirla en la medida en que sea necesario en el proceso de enseñanza del álgebra. Nuestro programa se ha elaborado siguiendo una minuciosa estructuración y organización a partir del estudio de numerosos trabajos que se han venido haciendo sobre la mejora del álgebra en estudiantes de secundaria. Debido a esto, los problemas usados han sido seleccionados para facilitar la comprensión del contenido que conllevan. El resultado final ha sido una serie de ejercicios sencillos de comprender, pero que pertenecen al Álgebra de secundaria y cuya realización ha implicado un gran trabajo previo.

Una de las cuestiones que preocupa a los profesores de matemáticas, es que los adolescentes se impliquen con los problemas, que no los perciban como algo ajeno a ellos y a sus vidas. Para solventar esta cuestión, en cuanto a la temática, en nuestros ejercicios se han hecho alusiones a la vida cotidiana y situaciones que podrían interesar a un adolescente.

Otro de los obstáculos que suelen encontrar los adolescentes en las matemáticas, es que no saben discernir adecuadamente a qué tipología de problema pertenece el ejercicio matemático que tienen delante para resolver. Con el fin de paliar esta cuestión, nuestro programa de entrenamiento ha seguido una secuencia de orden, según la cual, los participantes han tenido, antes que nada, que aprender a identificar en qué consiste, qué características tiene y por qué se trata de un problema de tipo algebraico. Sobre esta base cognitiva, el resto de tipos de problemas (monomios, polinomios y ecuaciones), han sido asimilados por los adolescentes de una forma más eficaz.

Una novedad de nuestro programa, ha sido la de asociar, entrenar y evaluar – tanto conjuntamente como por separado-, las habilidades de autorregulación y transferencia que pone en funcionamiento un estudiante de secundaria cuando está resolviendo una tarea algebraica. Por lo que respecta al entrenamiento de las habilidades indicadas, la propia estructura y orden de nuestros problemas, habría facilitado dicho entrenamiento.

No cabe duda de que cualquier programa de enseñanza, mejora en eficacia si su aplicación se lleva a cabo en las mejores condiciones posibles, y así ha sido con nuestro programa de enseñanza. Se recomienda propiciar un clima motivacional de aprendizaje a la hora de llevar a cabo su aplicación en clase. En dicho clima, todos los estudiantes deberían poder participar, preguntar dudas y expresar sus temores e inquietudes con respecto a sí mismos y a la resolución en sí de los problemas. De hecho, nuestro programa no habría sido eficaz si no se hubiera aplicado en un ambiente motivador en donde todos y cada uno de los pormenores ha sido atendido.

2.4.4. Aportaciones para el profesorado de matemáticas.

Uno de los aspectos que más nos preocupaba y que queríamos mejorar, era la capacidad en sí de comprender los problemas matemáticos por parte de los estudiantes de secundaria. Es decir, la capacidad de darse cuenta de que las matemáticas hay que estudiarlas, que no es suficiente con hacer problemas por hacerlos, que todo hay que organizarlo y estructurarlo de forma que sea un algo significativo para los adolescentes y comprendan la necesidad de asimilar los contenidos matemáticos antes de ponerse a hacer problemas.

Hay que estar presente en las clases para observar la cantidad de bloqueos, expresiones de baja autoestima académica y abandono de las tareas matemáticas, para darse cuenta del sufrimiento que ocasiona una asignatura tan vital e importante para el desarrollo personal y cognitivo de un adolescente.

El objetivo de nuestro programa era mejorar esa situación de desmotivación generalizada y tratar de que los estudiantes participantes miraran con otros ojos la asignatura. Y creemos que ese objetivo se ha cumplido con creces.

En realidad, nuestro entrenamiento queremos que cumpla con una función aleccionadora, según la cual, hacer tareas docentes tales como clarificar los términos matemáticos, organizar bien cómo se presentan los contenidos, ir de un nivel de menor a mayor dificultad, procurar que los estudiantes entiendan bien qué significa tipología de problema y explicarles qué tipos de problemas deben conocer a lo largo del curso; así como esforzarse para que asimilen bien la teoría antes de hacer los problemas, son herramientas eficaces que podrían asegurar un éxito futuro en la resolución de tareas matemáticas.

A lo anterior, habría que sumar la novedad de explicar a los adolescentes en qué consisten realmente las habilidades de autorregular el propio trabajo y de transferir información de los problemas conocidos a los nuevos. Así como también las ventajas de desarrollar ambos tipos de capacidades. A pesar de las resistencias iniciales, la mayoría de los estudiantes participantes en nuestro programa, acabó entendiendo muy bien y mejorando en ambos tipos de habilidades.

2.5. Limitaciones del trabajo y sugerencias para investigaciones futuras.

2.5.1. Limitaciones

Nuestro trabajo presenta algunas limitaciones. La primera tiene que ver con el horario en la aplicación de nuestro programa, diferente para los distintos subgrupos, que ha podido influir en los resultados. Hubiera sido deseable llevar a cabo el entrenamiento a la misma hora en todos los grupos.

La segunda limitación fue que no se pudo lograr que los propios profesores de matemáticas condujeran de forma directa el entrenamiento. Es cierto que los profesores de matemáticas de los grupos experimentales, estuvieron presentes en las sesiones y que ayudaron a organizar las clases y a resolver dudas e inquietudes de los estudiantes; sin embargo, hubiera sido deseable haber podido llevar a cabo un entrenamiento previo con estos profesores en relación a la aplicación del programa y que hubieran sido ellos mismos los que lo hubieran aplicado en su totalidad.

En tercer lugar, puede que la duración del programa no haya sido suficiente extensa como para producir los resultados esperados. El entrenamiento llevó a cabo durante dos meses a razón de una sesión semanal de 50 minutos. Es posible que sólo una sesión semanal no haya sido suficiente como para producir todas y cada una de las mejoras esperadas, habida cuenta de las dificultades que muchos de los adolescentes participantes llevaban arrastrando durante toda la secundaria obligatoria. De hecho, y a pesar de que se procuraba darles un tiempo prudencial para resolver los ejercicios, algunos estudiantes verbalizaban que no les daba tiempo de resolverlos.

Otra cuestión metodológica, quizá derivada de la anterior de falta de tiempo, es que se podría haber incluido una tipología más extensa de problemas algebraicos. El motivo es que, al incrementar la variabilidad de los tipos de ejercicios, la capacidad de transferencia iba a tener más oportunidades de aumentar.

Por otra parte, la propia estructura del diseño de intervención podría mejorar con el fin de depurar y optimizar los resultados. Así, por ejemplo, se podría haber llevado a cabo un diseño en el cual se hubiera llevado a cabo el entrenamiento de las habilidades de autorregulación en un grupo, las habilidades de transferencia en un segundo grupo, y finalmente, las habilidades conjuntas – de autorregulación y transferencia- en un tercer grupo experimental. Este diseño habría permitido ofrecer información sobre la incidencia del incremento de las habilidades indicadas por separado en la resolución de problemas algebraicos, así como la ventaja o no de llevar a cabo un entrenamiento conjunto en dichas habilidades.

2.5.2. Sugerencias para futuras investigaciones.

Debido a que los resultados apuntan a una mejora en la resolución de problemas algebraicos en estudiantes de secundaria, como consecuencia del entrenamiento conjunto de las habilidades de autorregulación y transferencia; sería necesario continuar en esta línea de investigación. A la luz de las limitaciones señaladas en nuestro estudio, parece razonable replicarlo parcialmente, haciendo que sean los propios profesores los que realicen la aplicación de las estrategias empleadas, ampliando la extensión del entrenamiento de modo que sea posible incluir otras categorías de problemas y más tiempo dedicado a cada una de ellas, e incluyendo una tercera condición en la que se entrenase a los profesores sólo en cómo mejorar el CMC, dado que parece que las diferencias previas en el mismo también afectan positivamente a los resultados, por lo que parece oportuno comparar el efecto relatico del entrenamiento utilizado en el presente estudio con el entrenamiento del CMC. Además, sería bueno poner a prueba el hecho de hacer explícito a los alumnos participantes en qué consiste tanto la capacidad de autorregular el propio trabajo, como la de saber transferir información relevante de unos problemas a otros.

REFERENCIAS

Abonyi, O.S., y Nweke, I. (2014). Effect of Guided Scoring Approach to Science Instruction on Senior Secondary School Students Achievement in Algebra. *Journal of Education and Practice*, 5 (14).

Alonso-Tapia, J. (1984). ¿Cómo conseguir que Juan realice su tarea? Algunas ideas generales sobre la motivación de logro y su modificación. *Infancia y Aprendizaje,* 26, 3 -12.

Alonso-Tapia, J. (1988). ¿Enseñar a pensar? Sí, pero ¿cómo? *Cuadernos de Pedagogía,* 164, 52-54.

Alonso-Tapia (1991). *Motivación y aprendizaje en el aula: cómo enseñar a pensar.* Santillana. Madrid.

Alonso-Tapia, J. (1992b). *Motivar en la adolescencia: teoría, evaluación e intervención.* Servicio de Publicaciones U.A.M. Madrid.

Alonso-Tapia, J., y Caturla Fita, E. (1996). *La motivación en el aula.* PPC. Madrid.

Alonso-Tapia, J. (1997): *Orientación educativa. Teoría, evaluación e intervención*. Madrid: Editorial Síntesis.

Alonso-Tapia, J. (1997a). *Motivar para el aprendizaje. Teorías y estrategias.* Edebé. Barcelona.

Alonso-Tapia, J., y Tapia, J.A. (2000). *Motivación y aprendizaje en el aula: cómo enseñar a pensar*. Madrid España. Santillana.

Alonso-Tapia, J., Chapapria, F., López, I.; Carriedo, N. (2004). Evaluación del conocimiento y formación del profesorado. Diseño, evaluación y valoración inicial de un programa de formación del profesorado de Ciencias Sociales de Secundaria en evaluación de conocimientos y capacidades cognitivas. En: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (Ed.), *Premios Nacionales de Investigación Educativa* 2002 (pp. 157-204). Madrid: MEC.

Alonso-Tapia, J. (2005): *Motivar en la escuela, motivar en la familia* .Ed: Madrid: Morata.

Alonso-Tapia, J. (2005). *Motivación para el aprendizaje: la perspectiva de los alumnos*. Foro Educacional, 7, 13-54.

Alonso-Tapia, J. y Fernández, B. (2008). Development and initial validation of the classroom motivacional climate questionnaire (CMCQ). *Psichothema*, 20 (4), 883-889.

Alonso Tapia, J. y de la Red, I. (2008). Evaluar "para" el aprendizaje, aprender para estar motivado: el orden de los factores sí afecta al producto. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*, 19(1), 1-18.

Alonso-Tapia, J., Huertas, J.A., y Ruiz, M.A. (2010). On the nature of motivational orientations: Implications of assessed goals and gender differences for motivational goal theory. *The Spanish Journal of Psychology*, 13(1), 232-243.

Alonso-Tapia, J, y Panadero, E. (2010). Effect of self-assessment scripts on self-regulation and learning. *Infancia y Aprendizaje*, 33(3), 385-397.

Alonso Tapia, J. y Moral, A. (2010). Percepción del clima motivacional de clase en estudiantes adultos no universitarios. *Revista de Psicología Educativa*, *16*(2), 115-133.

Alonso-Tapia, J. (2012). Rubrics and self-assessment scripts effects on self-regulation, learning and self-efficacy in secondary education. *Learning and Individual Differences.*, 22 (6), 806-813.

Alonso-Tapia, J., y Panadero, E. (2013). Self-assessment: Theoretical and Practical Connotations. When it Happens, How is it Acquired and what to do to develop it in our Students. *Journal of Research in Educational Psychology*, 11 (2). No 30.

Alonso-Tapia, J. Panadero, E. y Ruiz, M.A. (2014) Development and validity of the Emotion and Motivation Self-regulation Questionnaire (EMSR-Q). *Spanish Journal of Psychology,* 17 E-55. *1-15*

Alsina, C., 1995, Una matemática feliz y otras conferencias, OMA, Buenos Aires.

Alsina, C., 2000, La Matemática hermosa se enseña con el corazón y otras conferencias, OMA, Buenos Aires.

Arnau, D., y Puig, L.(2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (3), 49-66.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., y Puig, L. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving Word problems. *Computersy Education*, 63, 119-130.

Areelu, F. y Akinsola, M.K. (2014). Influence of tiered lesson and group personalization instructional strategies on senior secondary school students. *European Scientific Journal.* 10(16), 474-497.

Arzarello, F (1992). Pre-algebraic problem solving. En J.P. da Ponte, J.F. Matos, J.P. Matos y D. Fernandes (Eds), Mathematical problem solving and new information technologies (NATO ASI Serie F, v.89, pp. 155-166). Belin: Springer- Verlag.

Barrus, A. (2014). Is Self-Regulated Learning Instruction Predictive of Self-Regulated Learning Skills, Math Achievement and Learning Motivation in a Web-Based Learning Environment? *Society for Information Technologyy Teacher International Conference,* 1, 1172-1180.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C., Kieran y L. Lee (Eds), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Beltrán, J. (1993): *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje.* Editorial Síntesis,

Bloom, B.S.(1956).*Taxonomy of educational objectives; the classification of educacional goal*. Nueva York: Longman.

Bolívar, A. (2004). Del currículum como plan a la práctica del aula: elaboración de unidades didácticas. *Novedades educativas*, 162,6-9.

Bolívar, A. (2008). *Didáctica y currículum. De la modernidad a la postmodernidad*. Málaga. Aljibe.

Bolívar, A. (2008). La práctica curricular. En A. de la Herrán y J. Pareces (Coords.), *Didáctica General.* Madrid: McGraw-Hill.

Booth, L., y Johnson, D. (1984). *Algebra: Children´s strategies and errors. A report of strategies and errors in secondary mathematics Project.* Windsor, UK: NFER- Nelson.

Bruner, J.S. (1978). *El proceso mental del aprendizaje*. Madrid: Narcea.

Bruner, J.S. (1980). *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*. Madrid: Pablo del Río.

Bruner, J.S. (1991). *Actos de significado: Más allá de la revolución cognitiva.* Madrid: Alianza

Butler, S.M. y McMunn, N.D. (2006). *A teacher´s guide to classroom assessment*. San Francisco: Jossey Bass.

Bybee,R. y Stage, E. (2005). No Country Left Behind. In *Issues in Science and Technology,* 21, No. 2 pp. 69-75.

Callejo, M.L. (1994): *Un Club Matemático para la diversidad*. Narcea. Madrid.

Callejo, ML y Vila, A. (2003): *"Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria*". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol,X, No.2. 173.

Carpenter, T.P. Franke, M.L. y Levi, L. (2003). Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth: Heinemann. Carraher.

Carrillo, J. (1996): *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Confrey, J. (1991). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of research in education,* 16 (1). pp. 3-56. Ed: Sage Publications.

Consejería de Educación y ciencia (2008): *Hacia un enfoque de la educación en competencias*. Dirección General de Políticas Educativas y Ordenación Académica.

Cooper, G., y Sweller, J. (1987): Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology,*79 (4), Dec 1987, 347-362.

Chow, T. (2011). Students´difficulties, conceptions and attitudes towards learning algebra: an intervention study to improve teaching and learning. Thesis. Curtin University. Science and Mathematics Education Centre.

Darling-Hammond,L. y col. (2005): Educacional goals and purposes: Developing a curricular vision for teaching. En L. Darling-Hammond y J. Bransford (Eds). *A good teacher in every classroom*. San Francisco: Jossey Bass 169-200.

Decreto 23/ 2007 de mayo del Consejo de Gobierno, por el que se establece el currículo de la ESO de la Comunidad de Madrid.

Edogawatte, G. (2011). Secondary school students´misconceptions in algebra. University of Toronto. Department of Curriculum, Teaching and Learning.

Ely, R., y Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal.* 24(1), pp. 87-104.

English, L.D., y Halford, G.S.: (1995): "*Mathematics education. Models and processes*". LEA.

English, L.D., y Warren, E.A., (1995). General Reasoning Processes and elementary algebraic understanding: Implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 17 (4), 1-19.

English, L., D., Lesh, R., y Fennewald, T. (2008) *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development.* In: 11th International Congress on Mathematical Education, 6-13, Monterrey, Mexico. (Unpublished).

English, L. y Sriraman, B. (2010) *Problem Solving for the 21st Century* Theories of Mathematics Education . Advances in Mathematics Education. pp 263-290.

English, L., y Haldford, G. (2012). *Mathematics Education: Models and Processes.* E-Book.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. Madison, EE.UU.

Flavell, J.H. (1963). *The developmental psychology of Jean Peaget*. Nueva York: Van Nostrand.

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed). *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J. H.(1979): Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist,* 34, 906-911.

Frank, M.L. (1988): Problem Solving and Mathematical Beliefs. *Arithmetic Teacher*, 35 (5), pp. 32-34.

Foegen, A.(2010). Teaching algebra to students with learning disabilities. *Intervention in School and Clinic,* 46 (1).

Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, D., Owen, R., y Schroeter, K. (2003): Enhancing Third-Grade Student´s Mathematical Problem Solving With Self-Regulated Learning Strategies. *Journal of Educational Psychology, 95(2), 306-315.*

Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C., Owen, R., Hosp, M., y Jancek, D. (2003): Explicity Teaching for Transfer: Effects con Third-Grade Students´ Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 95(2), 293-305.*

Fuchs, L., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S., y Hamlett, C. (2004): *Expanding Schema-Based transfer instruction to help third graders solver real-life mathematical problems*. American Educational Research Journal Summer 2004, 41 (2), 419-445.

Fuchs, L., Compton, D., Fuchs, D., Paulsen, K,. Bryant, J., y Hamlett, C. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 97(3). Ed. American Psychological Association.

Garnham, A. (1996): *Manual de Psicología del pensamiento*. Paidós.

Geary, (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of leaning disabilities,* 37. (1), 4-15.

Gersten, R., Chard, D,. Jayanthi, M,; Baker,S.; Morphy, P y Flojo, J. (2009): *Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta- analysis of instructional components*. Review of educational Research, 79 (3), 2012-1242.

Gimeno, J. (1981). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo.* Madrid: Anaya.

Gimeno, J.(1983). El profesor como investigador en el aula. Un paradigma de formación del profesorado. *Educación y sociedad*, 2, 51-73.

Green, T.F. (1971): *Teaching and the Formation of Beliefs.* The Activities of Teaching. NY. McGraw Hill, Book Co (Cap. 3).

Hattikudur, S., y Alibali, M. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal o experimental child psychology,* 107 (1), 15-30.

Hewitt,D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching*, 163, 19-29.

Hughes, E., Witzel, B., y Riccomini, P. (2014). A Meta-Analysis of Algebra Interventions for Learners with Disabilities and Struggling Learners. *Journal of the International Association of Special Education,* 15 (1), 36-47.

Ives, B. (2007). Graphic organizers applied to secondary algebra instruction for students with learning disorders. *Learning Disabilities Researchy Practice,* 22 (2), 110-118.

Jitendra y col (1999): A case analysis of fourth-grade substraction instruction in basal mathematics programs: adherence to important instructional design criteria. *Learning Disabilities Research Practice*, 14(2), 69-79.

Jitendra, Asha K.; Griffin, Cynthia C.; Haria, Priti; Leh, Jayne; Adams, Aimee; y Kaduvettoor, Anju (2007): A comparison of single and multiple strategy instruction on third-grade students' mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 99(1), 115-127.

Jitendra, A., Star, J. Starosta, K., Leh, J., Sood, S., Caskie, G., Hughes, C., y Mack, T. (2009) Improving Seventh Grade Students' Learning of Ratio and Proportion: The Role of Schema-Based Instruction. *Contemporary Educational Psychology*, 34 (3), 250-264.

Jitendra, A., Star, J., Rodriguez, M., Lindell, M., y Someki, F. (2011): Improving students´proportional thinking using schema-based instruction. *Learning and Instruction* 21, 731-745.

Jitendra, A.; y Star, J. (2011): Meeting the Needs of Students with Learning Disabilities in Inclusive Mathematics Classrooms: The Role of Schema-Based Instruction on Mathematical Problem-Solving. *Theory Into Practice,* 50 (1), 12-19.

Jitendra, A., y Rodríguez, M. (2012): *Effectiveness of Small-Group Tutoring Interventions for Improving the Mathematical Problem-Solving Performance of Third-Grade Students with Mathematics Difficulties: A Randomized Experiment*. SREE Fall. Conference Abstract Template.

Jitendra, A., Star, J., Dupuis, D. (2013); Rodriguez, Michael C.: Effectiveness of Schema-Based Instruction for Improving Seventh-Grade Students' Proportional Reasoning: A Randomized Experiment. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 6 (2), 114-136.

Kieran, C. (1989): The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra,* 4, 33-56.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989): El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7 (3), 229-240.

Kieran C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., y Chalouh, L (1993): Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics,* 179-198.

Kieran, C.(1996): *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. En Approaches to algebra. Pp. 3-12. Ed: Springer Netherlands.

Kieran, C. y Drijvers, P. (2006).The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of Cas use in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 11:205.

Kieran, C. (2006): Research on the learning and teaching of algebra. En *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future.* Pp. 11-49. Ed: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007): *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation.* En Second handbook of research on mathematics teaching and learning, pp. 707-762. Ed: Greenwich, C.T.: Information Age Publishing.

Kieran, C. (2008). What do students struggle with when first introduced to algebra symbols. In *National Council of Teachers of Mathematics.*

Kilpatrick, W.H. (1918). The project method. *Teacher College Record*, 19 (September), 319-335.

Kilpatrick, W.H. (1951). *Philosophy of education*. Nueva York. MacMillan.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., y Stephens, A. (2005). Middle school students´understanding of core algebraic concepts: Equivalence&variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 37 (1), 68-76.

Kroesbergen, E.H. y Johanes, E.H. (2003): Mathematics interventions for children with special educational needs. *Remedial and special education*, 24 (2), 97-114.

Kramarski, B., Weiss, S, y Sharon, S. (2013). Generic versus context-specific prompts for supporting self-regulation in mathematical problem solving among students with low or high prior knowledge. *Journal of Cognitive Education and Psychology,* 12 (2).

Kuchemann, D. (1981). “Algebra”, in” K. Hart (Ed.), Children’s Understanding of Mathematics: 11–16, Murray, Londres, pp. 102–119.

Kuhl, J. (1985): Volitional mediators of cognitive-behavioral consistency: Self-regulatory processes and action versus state orientation. In J.Kuhl, y J. Beckman (Eds.), *Action control* (pp. 101-128). Nueva York: Springer.

Kunsch, C.A.; Jitendra, A.K, y Sood, S. (2007). The effects of peer-mediated instruction in mathematics for students with learning problems: A research Sinthesis.*Learning Disabilities Research Practice*, 22 (1), 1-12.

Lemke, M., y Gonzales, P. (2006). *US Student and Adult Performance on International Assessments of Educational Achievement. Findings form the Condition of Education.* National Center for Education Statistics. Abstract. NCES 2006-073.

Lester, F.K. (1987): *Why is problem solving such a problem? Reactions to a Set of Research Papers*. PME, Montreal 1987.

Lester, F.K., Garofalo, J. y Kroll, D.L. (1989): Self-Confidence, Interest, Beliefs and Metacognition: Key Influences on Problem Solving Behavior. En: *MCLEOD y ADAMS (eds.) Affect and Mathematical Problem Solving*. Springer-Verlag, Nueva York.

Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo de Educación.

Lian, L., Idris, N. (2006). Assessing algebraic solving ability of form four students. *Mathematics Education*, 1 (1), 55-76.

Lian, L., Yew, W.(2012). Assessing Algebraic Solving Ability: A Theoretical Framework. *International Education Studies*, 5 (6), .

Llinares, S. (1992): Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En: *MARCELO (ed): La investigación sobre la formación del profesorado: métodos de investigación y análisis de datos*. pp. 57-95. Cincel, Buenos Aires.

Loveless, C.,Fennell, F., Williams, V., Loewenberg, D., y Banfield, M. (2008): Report of the subcommittee on the national survey of Algebra I teachers. En *Foundation for Success: Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Chapter 9. National Opinion Research Center (NORC) at the University of Chicago.

Maccini, P., y Hughes, C. (2000). Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities Researchy Practice.* 15 (1), 10-21.

Maccini, P., y Gagnon, J. (2005). Math strategy instruction for middle school students. En http://hdl.handle.net/1920/284

Maccini, P., Mulcahy, C., y Wilson, M.(2007). A follow-up of mathematics interventions for secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 22* (1), 58-74.

Malara, N. y Navarra, G. (2003). *ArAl Project. Arithmetic pathways towards favouring prealgebraic thinking.* Bologna: Pitagora Editrice.

Mayer, R. (1983): "Thinking, Problem Solving and Cognition". San Francisco W.A. Freeman and Co. U.S.A.

Mayer, R,, Wittrock, M.(1996): *Problem-Solving transfer*. En Handbook of Educational Psychoology. Cap. 3.

Mayfield, K.,y Glenn, I. (2008). An evaluation of interventions to facilitate algebra problem solving. *Journgal of Behavioral Education*, 17, 278-302.

Martínez,A.A; Martínez, A; Tambo, I y Ugarriza, J. (2005): *Proyecto PISA. Ejemplos de ítems de Conocimiento Científico*. Proyecto para la Evaluación Internacional de Estudiantes de 15 años en Matemáticas, Lectura y Ciencias. Gobierno Vasco.

McLeod, D.B. (1992): Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En *Grows, D.A. (ed:) Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. pp. 575-596. MacMillan, Nueva York.

Mc Neil, N., Rittle-Johnson, B., y Hattikudur, S.(2010). Continuity in representation between children and adults: Arithmetik knowledge hinders undergraduates´ algebraic problem solving. *Journal of Cognition,* 11 (4), 437-457.

Meichenbaum, D., y Biemiller, A. (1990). *In search of student expertise in the classroom: A metacognitive analysis.* Paper presented at the Conference on Cognitive Research for Instructional Innovation, University of Maryland, College Park, MD.

Miller, S., y Mercer, C. (1997). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. *Journal of learning disabilities,* 30 (1).

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (Ed.) (2004). *Premios Nacionales de Investigación Educativa*, 2002. (pp.157-204). Madrid, MEC.

Monereo,C. y Pozo, J.I.(2007): Competencias básicas. *Cuadernos de Pedagogía*, 370 (9).

Montague y Applegate (2000). Middle School Students ´Perceptions, Persistence, and Performance in Mathematical Problem Solving. *Learning Disability Quarterly,* 23 (3).

Montague, M, (2007). Self- regulation and mathematics instruction. *Learning Disabilities Research y Practice.* 22 (1), 75-83.

Moral Santaella, C.; Robles Vílchez,M.C.; Caballero Rodríguez, K.; y Corchón Alvarez, E. (2010): El currículum y su plan de acción. En *Didáctica. Teoría y práctica de la enseñanza*. Moral Santaella (Coord). Pirámide. 2ª Edición.

Moreno Rosset, C (2003): *Ejercicios prácticos de evaluación psicológica. Concepto, proceso y aplicación en las áreas del desarrollo y de la inteligencia*. Ed:Sanz y Torres.

Nobre, S., Amado, N., Carreira, S., y Ponte, J. (2011). *Algebraic thinking of grade 8 students in solving word problems with a spreadsheet*. Proceedings of CERME 7, Reszow, Polonia.

Ntsohi, M. (2013). Investigating teaching and learning of Grade 9 Algebra through excel spreadsheets: a mixed- methods case study for Lesotho. Thesis. Stellenbosch University.

Orji, A.B. (2010): Effect of Webbing instructional strategy on students´achievement in algebraic word problems. *Journal of Research in National Development, 8(2).*

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas – motivación del alumnado y competencia matemática.* Barcelona, España: Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

O´Shaughnessy, T., y Swanson, H.L., (1998). Do immediate memory deficits in students with learning disabilities in Reading reflect a developmental lag or déficit? A selective meta-analysis of the literatura. *Learning disability quarterly*, 21 (2),

Panasuk, R. (2010).Three phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations. University of Massachusetts Lowell.

Panadero, E., y Alonso-Tapia (2013). Self-assessment: Theoretical and practical connotations. When it happens, how is it acquired and what to do to develop it in our students. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology.* 11(2), 551-576.

Panadero, E., y Alonso-Tapia, J. (2013). Revisión sobre autoevaluación educativa: evidencia empírica de su implementación a través de la autocalificación sin criterios de evaluación, rúbricas y guiones. *Revista de Investigación en Educación.* 11(2), 172-197.

Panadero, E.; y Alonso-Tapia, J. (2013). Self-assessment: Theoretical and Practical Connotations. When it Happens, How is it Acquired and what to do to Develop it in our Students. *Education y Psychology,- Ey P I + D + i.*

Panadero, E., y Alonso-Tapia, J.(2014). How do students self-regulate? Review of Zimmerman´s cyclical model of self-regulated learning. *Annals of Psychology,* 30 (2). .

Panadero, E., y Alonso-Tapia, J. (2014). Teorías de autorregulación educativa: una comparación y reflexión teórica. *Psicología Educativa*. 20 (1), 11-22.

Panadero, E. (2014). ¿Cómo autorregulan nuestros alumnos? Modelo de Zimmerman sobre estrategias de aprendizaje. *Anales de Psicología,* 30(2), 450.

Panadero, E., Brown, G., y Courtney, M. (2014). Teachers´reasons for using self-assessment: A survey self-report of Spanich teachers. *Assessment in Education: Principles, Policyy Practice.* 21(4), 365-383.

Panadero, E., Klug, J, y Järvelä (2016). Third wave of measurement in the self-regulated learning field: When measurement and intervention come hand in hand. *Scandinavian Journal of Educational Research.* . 60(6), 723-735.

Panadero, E., Jonsson, A, y Strijbos, J.W. (2016). Scaffolding self-regulated learning through self-assessment and peer assessment: Guidelines for classsroom implementation. *Assessment for Learning: Meeting the Challenge of Implementation,* 311-326.

Panadero, E., Brown, G.T.L., y Strijbos (2016). The future of student self-assessment: A review of known, unknowns and potential directions. *Educational Psychology Review*. 28(4), 803-830.

Panadero, E., y S. Järvelä, S. (2017). Models of Self-regulated Learning: Zimmerman, Boekaerts, Winne, Pintrich, Efklides, and Hadwin y Järvelä. A review in 2017. *Frontiers in Psychology*, 8, 422.

Pimm, D. (1991). *Metaphoric and metonymic discourse in mathematics classrooms*. Ed. Underhill, R. En Psychology of Mathematics Education, 2, p.43

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En N. Bednarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* Dordrecht: Kluwer.

Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria.

Rimby, K. (2012). Using computer-assisted graphic organizers in algebra instruction to support high school students with learning disabilities. *Theses and Dissertations.* 159.

Rittle-Johnson, B. y Star, J. (2009): Making Álgebra Work: Instructional Strategies that Deepen Student Understanding, within and between Álgebraic Representations. *ERS Spectrum*, 27(2), 11-18.

Secretaría de Estado de Educación, Formación Profesional y Universidades. Ministerio de Educación, Cultura y Deportes: "PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español. Madrid, 2016.

Schoenfeld, A.H. (1985a): “Mathematical problem solving”. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1987). What´s all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed), *Cognitive science and mathematics education* (pp.189-215). Hillsdale, N.J.: Lawerence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H.(1988). When good teaching leads to bad results:The disasters of “well taught” mathematics classes. *Educational Psychologist*, 23, 145-166.

Schoenfeld, A.H. (1992): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics, In D.A. *Grouws (*Ed.*), Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 334- 389). Nueva York: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1994) Reflections on doing and teaching mathematics. In A.H.Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Scheuermann, A. M., Deshler, D. D., y Schumaker, J. B. (2009). The effects of the explicit inquiry routine on the performance of students with learning disabilities on one-variable equations. *Learning Disability Quarterly*, *32*(2), 103-120.

Shin, M. y Pedrotty, D. (2015). *A Synthesis of Mathematical and Cognitive Performances of Students With Mathematics Learning Disabilities*. Journal of Learning Disabilities January 1.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching 77, 20-26.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics* (2nd ed.). Harmonsdsworth, England: Penguin.

Stiphout, I. (2011). The development of algebraic proficiency. Thesis. Eindhoven University of Technology.

Strickland, T., y Maccini, P. (2010). Strategies for teaching algebra to students with learning disabilities: making research to practice connections. *Intervention in School and Clinic,* 46 (1).

Swanson, H.L. (1990). Influence of metacognitive knowledge and aptitude on problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 82(2), 306-314.

Swanson, H.L. (1999): Instructional components that predict treatment outcomes for students with learning disabilities: support for a combined strategy and direct instruction model. *Learning disabilities researchy practice,* 14 (3), 129-140.

Swanson, H., y Hoskyn, M. (2001) Instructing Adolescents with Learning Disabilities: Converting a Meta-Analysis to Practice. *Journal of Learning Disabilities,* 36 (2).

Swanson, H.L., Sáez, L. (2003). *Memory difficulties in children and adults with learning disabilities*. Eds: Swanson, H.L, Harris, K.R., y Graham, S. En Handbook of learning disabilities. (p. 182-198). Nueva York. Guildford Press.

Swanson, H.L. y Jerman, O. (2006). Math disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review of educational research,* 76 (2).

Sweller, J., Cooper, G. (1985). The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *Cognition and Instruction,* 2 (1), 59-89.

Sweller,J. (1989). Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology,* 81 (4), 457-466.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5- 24.

Torres, J. (1991). *El curriculum oculto*. Madrid: Morata.

Wagner, S., y Kieran, C. (1989): Research issues in the learning and teaching of algebra. Vol. 4. Monograph at the University of Georgia. Editor: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner S., y Parker S. (1999). “Advancing algebra”, in: Barbara Moses (Ed.), Algebraic Thinking, Grades K-12, Reston, VA: NCTM, pp. 328–340

Willers, M. (2012). *Historia y aplicaciones del álgebra*. Barcelona: Art Blume, S.L.

Wilson, J., y Clarke, D. (2004). Towards the Modelling of Mathematical Metacognition. *Mathematics Education Research Journal,* 16 (2), 25-48.

Witzel, B., Mercer, C., y Miller, M. (2003).Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Research and Practice,* 18 (2), 121-131.

Xin, Y., Zhang, D., Whipple, A., y Si, L. (2011).A Comparison of Two Mathematics Problem-Solving Strategies: Facilitate Algebra-Readiness. *The Journal of Educational Research,* 104:381–395.

Zimmerman, B.J. (1989a). A social cognitive view of self-regulated learning. *Journal of Educational Psychology,* 81, 329-339.

Zimmerman, B.J. (1989b). Models of self-regulated learning. In B.J. Zimmerman y D. H. Schunk (Eds.), *Self- regulated learning and academic achievement: Theory, research, and practice* (pp.1-25). New York: Springer- Verlag.

Zimmerman, B.J. (1990a). Self- regulated learning and academic achievement: An overview. *Educational Psychologist,* 25, 3-17.

Zimmerman, B.J. y Martínez-Pons, M. (1990). Student differences in self-regulated learning: Relating grade, sex, and giftedness to self-efficacy and strategy use. *Journal of Educational Psychology,* 82, 51-59.

APÉNDICES

Apéndice 1

Cuestionario de Clima Motivacional de Clase (CMCQ) (Alonso-Tapia y Fernández, 2008)

Instrucciones

Esta prueba contiene una serie de afirmaciones que se refieren a cómo percibes el ambiente de tu clase, a lo que crees que valoran tus compañeros y profesores y a cómo soléis trabajar. Tu tarea consiste en indicar, pensando lo que ocurre en las clases por las que se te pregunta, el grado en que estás de acuerdo con cada afirmación. Para responder, en la hoja de respuestas elige la opción que representa tu grado de acuerdo con el contenido de la afirmación, según la siguiente escala:

1	2	3	4	5
Totalmente en desacuerdo	Bastante en desacuerdo	Indiferente	Bastante de acuerdo	Totalmente de acuerdo

1. En esta clase, el profesor escucha nuestras opiniones y nos da bastante autonomía para trabajar.	1 2 3 4 5
2. En esta clase los exámenes que pone el profesor tienen poco que ver con lo que ha explicado en clase.	1 2 3 4 5
3. Este/a profesor/a antes de explicar trata de ver qué sabemos del tema.	1 2 3 4 5
4. Este/a profesor/a propone las cosas poco a poco y así es más fácil entenderlas.	1 2 3 4 5
5. En esta asignatura el/a profesor/a no fomenta la participación en la clase.	1 2 3 4 5
6. En esta clase pocos preguntan o piden ayuda al profesor/a porque es distante y no ayuda.	1 2 3 4 5
7. Este profesor tan pronto está con una cosa como con otra, y así no me aclaro.	1 2 3 4 5
8. En esta clase el/a profesor/a hace más caso a los más listos.	1 2 3 4 5
9. A menudo este/a profesor/a se pone a explicar como si supiéramos cosas que no sabemos.	1 2 3 4 5
10. A menudo, el modo de reaccionar del profesor/a en esta clase cuando uno se equivoca le hace sentirse mal.	1 2 3 4 5
11. Mi profesor/a sabe reconocer cuando nos esforzamos por aprender y nos valora por ello siempre que puede.	1 2 3 4 5
12. Este/a profesor/a nos estimula a comentarle las dudas que tenemos sobre los trabajos.	1 2 3 4 5
13. Este profesor se suele esforzar porque relacionemos lo nuevo que vamos aprendiendo con lo ya visto.	1 2 3 4 5
14. Este/a profesor/a pone pocos ejemplos, por lo que cuesta trabajo comprender lo que explica.	1 2 3 4 5
15. Hay personas que no saben elogiar lo bueno que hacen los demás, y éste/a profesor/a es una de ellas.	1 2 3 4 5
16. A este/a profesor/a se le nota que le importa mucho que aprendamos de verdad, no sólo de forma superficial.	1 2 3 4 5
17. Los exámenes de esta asignatura suelen ser bastante adecuados a lo que se ha trabajado en clase.	1 2 3 4 5
18. En esta clase los objetivos propuestos por el/a profesora/a cuando nos pone tareas no están claros.	1 2 3 4 5
19. En esta clase las instrucciones para las tareas son claras, de modo que sabemos qué hacer.	1 2 3 4 5
20. Este/a profesor/a utiliza imágenes, ejemplos o anécdotas con frecuencia para ilustrar lo que explica.	1 2 3 4 5
21. Este/a profesor/a te hace sentir que aunque te equivoques no pasa nada porque de los errores se aprende.	1 2 3 4 5
22. El/a profesor/a de esta clase no detiene su explicación para ayudar a los alumnos que no le siguen.	1 2 3 4 5
23. Mi profesor/a quiere de verdad que nosotros disfrutemos aprendiendo cosas nuevas.	1 2 3 4 5
24. En esta clase el/a profesor/a procura trataros a todos por igual, sin favoritismos.	1 2 3 4 5
25. A menudo este profesor/a nos presenta información nueva o sorprendente que despierta nuestro interés.	1 2 3 4 5
26. Cuando damos un tema en esta clase, no se suele hacer referencia a lo que ya hemos visto antes.	1 2 3 4 5
27. En esta asignatura, el/a profesor/a se adapta al ritmo de la clase, dando tiempo para pensar.	1 2 3 4 5
28. Las actividades que se piden en esta asignatura, están claras y cada uno sabe lo que tiene que conseguir.	1 2 3 4 5
29. Este profesor casi nunca nos deja opinar sobre cómo o con quién trabajar: nos deja poca libertad.	1 2 3 4 5
30. A este/a profesor/a le gusta que intervengamos, nos escucha y responde a nuestras preguntas.	1 2 3 4 5
31. En general el modo en que se nos explica y proponen las actividades es confuso: sería mejor ir por pasos.	1 2 3 4 5
32. En la clase de este/a profesor/a el trabajo es monótono, rutinario y carente de sentido.	1 2 3 4 5

Apéndice 2

Prueba de comprensión lectora. Batería CL-4 (Alonso-Tapia y otros, 1997)

Nota: Se incluyen sólo los textos y preguntas de la prueba utilizados.

TEXTO 1

"En aquel momento vio a todos los vetustenses felices a su modo, entregados unos al vicio, otros a cualquier manía, pero todos satisfechos. Sólo ella estaba allí como en un destierro. "Pero, ¡ay!, era una desterrada que no tenía patria a donde volver, ni por la cual suspirar. Había vivido en Granada, en Zaragoza, en Granada otra vez, y en Valladolid; don Víctor siempre con ella; ¿qué había dejado ni a orillas del Ebro, el río del Trovador, ni a orillas del Genil y el Darro? Nada; a lo más algún conato de aventura ridícula. Se acordó del inglés que tenía un carmen junto a la Alhambra, el que se enamoró de ella y le regaló la piel de tigre cazado en la India por sus criados (...), aquel pobre míster Brooke se había casado con una gitana del Albaicín. Buen provecho; pero de todas maneras era una aventura estúpida. La piel del tigre la conservaba, por el tigre, no por el inglés."

"¿Por qué no había ido al teatro? Tal vez allí hubiera podido alejar de sí aquellas ideas tristes, desconsoladoras, que se clavaban en su cerebro como alfileres en un acerico. Sí, estaba siendo tonta. ¿Por qué no había de hacer lo que todas las demás?"

1.1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor lo más importante que el autor quiere comunicar?

a) La protagonista recuerda algunos hechos pasados de su vida.
b) La protagonista se siente sola y perdida en el ambiente en que vive.
c) La protagonista se arrepiente de no haber ido al teatro ese día.

1.2. La intención principal del autor de este texto es:

a) Hacernos partícipes de los sentimientos actuales de la protagonista.
b) Darnos a conocer detalladamente el ambiente que rodea a la protagonista.
c) Justificar la actitud de la protagonista del relato que nos presenta.

1.3. Si nos encontramos con un texto semejante a éste, en que el autor cuenta los sentimientos de una persona, la mejor forma de saber qué es lo más importante que el autor quiere comunicar es:

a) Fijarnos en lo que tienen en común las afirmaciones que se hacen sobre la protagonista.
b) Fijarnos en las relaciones que se establecen entre la protagonista y otros sujetos.
c) Fijarnos en la primera idea del texto porque suele ser la idea fundamental.

1.4. En la frase *"Sólo ella estaba allí como en un destierro"*, la forma verbal *"estaba"*,

a) Traduce un pensamiento pasado para el personaje y para el narrador
b) Traduce un pensamiento presente para el personaje y para el narrador.
c) Traduce un pensamiento pasado para el narrador y presente para el personaje.

1.5. Las palabras *"ella"* y *"le"* en *"se enamoró de ella y le regaló la piel de tigre"*, se refieren:

a) Las dos a la protagonista del relato, que recuerda su pasado.
b) "Ella" a la protagonista y "le" al inglés mencionado en el texto.
c) "Ella" a la Alhambra, que se nombra en el texto, y "le" al inglés.

1.6. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto: *"En aquel momento vio a todos los vetustenses felices a su modo, entregados unos al vicio, otros a cualquier manía, pero todos satisfechos"*?

a)"En aquel momento se dio cuenta de que todos los vetustenses eran felices a su modo porque todos ellos estaban satisfechos".
b)"En aquel momento se dio cuenta de que los vetustenses estaban satisfechos y de que eran felices a pesar de que unos se entregaban al vicio y otros a cualquier manía".
c)"En aquel momento vio a todos los vetustenses felices a su modo, entregados unos al vicio, otros a cualquier manía, sin embargo, todos satisfechos"

1.7. Lo más probable es que este texto pertenezca:

a) Al diario íntimo de un personaje, una mujer.
b) A un relato guiado por un narrador omnisciente.
c) A una narración literaria autobiográfica.

1.8. En el texto aparecen palabras como: *"destierro, ¡ay!, suspiros, aventura, tristes, desconsoladoras"*. También se cuentan algunas experiencias de una persona. Este hecho permite situar el texto en una época:

a) En que la literatura se esfuerza por analizar la realidad de manera profunda y objetiva.
b) En que la literatura se aleja de la realidad, recreándose en la exaltación del sentimiento.
c) En que la literatura se orienta hacia una función fundamentalmente didáctica y educativa.

1.9. ¿Cuál de estas afirmaciones relativas al texto es cierta?

a) El narrador da la palabra al "yo" del personaje central del texto.
b) El narrador explica objetivamente lo que observa de su personaje.
c) El narrador y el personaje se funden en un discurso compartido

1.10. Por el tipo de descripción, por el estilo y los detalles que se mencionan, se puede afirmar que la historia que se narra, se sitúa probablemente:

a) En el siglo XVI.
b) En el siglo XIX.
c) En el siglo XX.

TEXTO 2

Afortunadamente, los españoles no somos racistas. Tendremos otros defectos, pero de todos es sabido que la cosa esa del racismo no nos afecta nada, ni una miaja. Por ejemplo, un mercado público de Madrid acaba de contratar guardias privados para que impidan a la gitanería el andar pidiendo limosna entre los puestos. Tanto celo ponen esos hombres en su tarea que no se limitan a expulsar a aquellos cogidos in fraganti con la mano petitoria y la boca abierta, sino que a veces cortan por lo sano y no dejan entrar en el mercado a ninguna hembra oscura. Total, que hay días que las puertas de la lonja están abarrotadas de mujeres-color-cobre que asaltan a las mujeres-color-blanco con un modesto ruego: por favor, cómpreme un pollo, señorita, que a mí no me dejan pasar para comprarlo. Pero esto no tiene nada que ver con el racismo: la culpa es de los gitanos, que ya se sabe que son unos pesados. Tan pesados, tan obcecados y tan suyos que se empeñan en desdeñar la sociedad paya, en seguir malviviendo en chabolas y en mantener una tasa de analfabetismo del 85%, en vez de estudiar para arquitectos o de residir en chalés de lujo. Son muy brutos.

A Dios gracias, los españoles no somos racistas. Junto a mi casa hay un parque suburbial, un polvoriento espacio abierto con pinos languideciendo entre basuras. Al fondo, allá donde la cochambre se convierte en horizonte, hay un asentamiento de gitanos. De vez en cuando, un adiestrador de perros acude al parque con sus animales. Y, en ocasiones, para hallar un entretenimiento en su trabajo, el adiestrador azuza al perro contra los churumbeles, que cruzan el parque hacia su casa. Pero esto no es racismo...

2.1. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes expresa mejor la idea más importante que el autor ha querido transmitir?

a) Los españoles no somos racistas, tan sólo tenemos alguna pequeña diferencia con los gitanos.
b) Los españoles a menudo actuamos de modo racista en cosas a las que damos poca importancia.
c) Los españoles somos racistas pero los gitanos lo son más por no querer integrarse ni estudiar.

2.2. La intención principal del autor en este texto es:

a) Criticar a los españoles por su comportamiento que es, con frecuencia, racista.
b) Llamar la atención de las autoridades para que vigilen mejor las zonas públicas.
c) Criticar la actitud de los gitanos que se oponen a toda integración en la sociedad.

2.3.En textos como éste, en que el autor parece sostener cosas que se contradicen, la mejor forma de saber qué es lo más importante que el autor nos quiere comunicar consiste en:

a) Fijarnos en la primera afirmación, donde el sentido queda bien claro.
b) Aceptar como idea principal lo opuesto a lo que parece defenderse.
c) Fijarnos en las ideas que se hallan resumidas en el último párrafo.

2.4. La frase: *"Tendremos otros defectos, pero de todos es sabido que la cosa esa del racismo no nos afecta nada, ni una miaja"* significa:

a) Que en el futuro vamos a tener otros defectos, pero no ése.
b) Que efectivamente tenemos otros defectos, pero no ése.
c) Que probablemente tengamos otros defectos, pero no ése.

2.5. En la línea doce, dice el texto: *"por favor cómpreme un pollo, señorita, que a mí no me dejan pasar para comprarlo".* Esas palabras están dichas por:

a) El autor, que se implica en el texto.
b) Por una persona de raza gitana.
c) Por una mujer de raza blanca.

2.6. La frase: *"tanto celo ponen esos hombres en su tarea que no se limitan a expulsar a aquellos cogidos in fraganti"* significa:

a) Que expulsaban, cumpliendo con su deber, a los cogidos in fraganti.
b) Que no sólo expulsaban a los que cogían in fraganti: además...
c) Que tenían mucho celo y expulsaban a los que cogían robando.

2.7. Lo más probable es que este texto proceda:

a) De un libro de texto sobre Ciencias Sociales.
b) De un estudio sociológico sobre grupos sociales.
c) De algún artículo escrito en un periódico.

2.8. En el texto aparecen las expresiones *"...no somos racistas", "...pero esto no es racismo", "esa cosa del racismo no nos afecta a los españoles..."* ¿Por qué utiliza el autor, en un texto como éste, el recurso llamado *reiteración*?

a) Porque no es verdad, en opinión del autor, que los españoles no seamos racistas.
b) Para dar más fuerza a la idea de que no somos racistas, por si alguien lo dudase.
c) Porque quiere desmentir que cualquier cosa que se haga a los gitanos sea racismo.

2.9. Tras la lectura del texto, se puede afirmar que el autor utiliza como recurso estilístico principal:

a) La ironía.
b) La metáfora.
c) La personificación.

2.10. En el texto aparece la frase: *"...cómpreme un pollo, señorita, que a mí no me dejan pasar para comprarlo".* La proposición introducida por el *"que"* es:

a) Subordinada de relativo
b) Subordinada sustantiva
c) Subordinada causal

TEXTO 3

Una de las más profundas impresiones que me deparó mi primera estancia en Nueva York fue el descubrirme haciendo profesión de antirracismo a cada momento. Nunca necesité hacerlo antes, por la sencilla razón de que jamás tuve el menor problema con seres de piel distinta a la mía. El racismo sólo era una evidencia que se me presentaba en las películas y que, por cuanto acabo de declarar, se me antojaba incomprensible. El racista era, para mí, un personaje tan lejano como el gánster, el vaquero o el astronauta. Algo que mi sociedad no se había planteado siquiera.

Nueva York me colocó ante la evidencia de una manera brutal. De repente, me encontré adoptando una serie de precauciones absurdas, y no fue menor la necesidad de demostrar una simpatía exagerada a cada negro que me salía al paso. Huelga decir que ya la sentía mucho antes de llegar a Estados Unidos, pero nunca tuve la necesidad de exhibirla a guisa de carné que me acreditara contra el peligro. Tales precauciones, tales prejuicios recién adquiridos enturbiaban mis relaciones con mis amigos de color. En una simple discusión sobre cine o teatro, no me atrevía a llevarles la contraria para que no viesen en ello una agresión que pudiera herirles. Estaba recurriendo a una serie de actitudes paternalistas, estúpidas a la par que dañinas. Sin yo pretenderlo había dejado de tratarles como a seres normales...

3.1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor lo más importante que el autor quiere comunicar con el texto?:

a) La estancia en Nueva York supuso un cambio en sus manifestaciones en relación con el racismo.
b) El racismo había sido para el autor una evidencia que se mostraba en las películas.
c) El racismo era una situación lejana que en la sociedad del autor no se había planteado.

3.2. La intención principal del autor en este texto es:

a) Comunicarnos el impacto que ha supuesto para él convivir con el racismo.
b) Contarnos cómo ha llegado a adquirir ciertos prejuicios contra los negros.
c) Mostrarnos que el ciudadano español no es racista y el americano sí.

3.3. La mejor forma para saber cuál es la idea principal en un texto como éste, en el que el autor contrasta dos experiencias, es:

a) Fijarnos en la última frase que recoge la conclusión a la que quiere llegar el autor.
b) Leer el texto completo y volverlo a leer, subrayando las ideas principales de cada párrafo.
c) Buscar la idea que recoge la relación que se establece entre los hechos que se comparan.

3.4. En el texto aparece la frase *"Tales prejuicios recién adquiridos enturbiaban mis relaciones con mis amigos de color"*. Dicho enunciado expresa:

a) Un hecho simultáneo a su estancia en Nueva York.
b) Un hecho previo a su estancia en Nueva York.
c) Un hecho posterior a sus relaciones con los negros.

3.5. En la oración *"...pero nunca tuve la necesidad de exhibirla a guisa de carné.."*, el pronombre subrayado se refiere a:

a) Necesidad.
b) Simpatía.
c) Evidencia.

3.6. En el texto aparece la frase *"estaba recurriendo a una serie de actitudes estúpidas a la par que dañinas"*. ¿Por cuál de las siguientes alternativas se puede sustituir la expresión *"a la par que"*?:

a) Más que dañinas.
b) O bien, dañinas.
c) Además de dañinas.

3.7. ¿En qué tipo de libro o documento podríamos encontrar este texto?:

a) En un libro de Ética.
b) En un artículo periodístico.
c) En una carta entre amigos.

3.8. En este texto, en función del contexto, la palabra *"estancia"* es sinónimo de:

a) Residencia.
b) Mansión.
c) Habitación.

3.9. ¿En cuál de los siguientes enunciados la palabra *"que"* introduce una oración de relativo?:

a) No me atrevía a llevarles la contraria para que no viesen en ello una agresión.
b) Huelga decir que ya lo sentía mucho antes de llegar a Estados Unidos.
c) Fue grande la necesidad de demostrar simpatía a cada negro que me salía al paso.

3.10. En el texto aparece la expresión *"a guisa de carné"*. Esta expresión implica:

a) Un contraste.
b) Una comparación.
c) Una finalidad.

Apéndice 3

Prueba de conocimientos matemáticos previos.

Nombre y apellidos:		
Curso:	Grupo:	Fecha:

La siguiente prueba tiene el objetivo de evaluar los conocimientos previos que tienen los estudiantes antes de aplicar el programa de enseñanza. Por favor, contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué son los números enteros y para qué sirven?

2. Completa esta secuencia de números enteros (para averiguar si saben hacer operaciones con números enteros. Conocimiento previo nº 1):

a)3- ( ) = -3 b) 7 - (- 7) = c) ( ) · (-8) = -24

3. ¿Qué es una fracción? Pon un ejemplo.

4. Resuelve o completa las siguientes operaciones de fracciones (para averiguar si saben hacer operaciones con fracciones. Conocimiento previo nº 2):

a) (7/12) + (3/ 11)= (77+36 /132=) b) (8/15) - (6/18)= ( )

c) (7/9) · (4/6)= ( ) d) (5/9): (6 / 11)= ( )

e) (8 / 9) · *(3 /)* = (24 / 36) f) (7 /12): *(/9)*= (63/96)

5. ¿Qué son fracciones decimales? Pon un ejemplo.

6. Indica cuál es el número decimal equivalente a las fracciones siguientes:

a) 14/3= ***(*** *)(decimal periódico puro)* b) 7/4= ***(*** ***)****(decimal exacto)* c) 40/8=***( )*** *(entero)*

7. ¿Qué quiere decir *jerarquía de operaciones*? Por un ejemplo.

8. Resuelve las siguientes operaciones de números naturales, decimales y fracciones (para saber si conoce el concepto de jerarquía de operaciones y sabe hacer uso de los paréntesis. Conocimiento previo nº 3):

a) 9: (-2) · 8 + 32 – 7 =

b) 8 · (-7) - 340=

c) (12/ 5) · (15 / 8) + 6 / 19 =

d) (15/18) : (8/9) – 74 =

e) 7, 48 · 20/43 =

f) 3, 75 – 14/ 32 =

9. ¿Qué es una potencia, qué es la base de una potencia y el exponente de una potencia?

10. Resuelve los siguientes ejercicios de potencias:

a) $a^3 \cdot a^2 =$

b) $a^4 : a^2 =$

c) $a^7 \cdot b^7 =$

d) $a^{12} : b^{12} =$

11. ¿A qué se llama **razón** entre dos números **a** y **b**? Y ¿a qué se llama proporción entre los números **a,b,c** y **d**?

12. Comprueba que si las siguientes razones forman proporción o no:

a)3 / 4 y 7/ 8

b) 6/9 y 2 / 3

c) 7/14 y 1 / 2

13. ¿Qué son repartos directamente proporcionales?

14. Resuelve el siguiente problema: "Un terreno de 140 metros se quiere dividir en tres partes que sean proporcionales a 1, 2 y 4 ¿cuánto medirá cada parte?"

15. ¿Para repartir una cantidad T de forma inversamente proporcional entre las cantidades x , y , z, cómo lo hacemos?

16. Resuelve el siguiente problema: "Tres compañeros creen que tardarán 50 minutos en hacer un trabajo. Deciden dedicarle cada uno un tiempo inversamente proporcional al que han dedicado a hacer el trabajo anterior, que ha sido de 20, 15 y 10 minutos respectivamente. ¿Cuánto tiempo dedicará cada uno?

Apéndice 4

Cuestionario de mensajes autorregulatorios de la motivación y la emoción CMA (En la publicación en inglés: EMSRQ) (Alonso-Tapia y Panadero, 2014)

Estamos tratando de entender qué pasa por la mente de los alumnos mientras trabajan con el propósito de determinar qué ayudas dar para facilitar el aprendizaje. Por eso te pedimos que señales en qué grado, mientras haces un trabajo de clase, te pasan por la cabeza pensamientos como los que aparecen a continuación. Utiliza la siguiente escala:

1	2	3	4	5
Casi nunca	Algunas veces	Ni mucho ni poco	Bastantes veces	Casi siempre

1. Esto no merece la pena. A ver si acabo pronto.	1 2 3 4 5
2. ¡Qué cansancio! Bueno, tengo que seguir si quiero aprobar.	1 2 3 4 5
3. ¡Qué estrés! Lo estoy haciendo fatal... ¡Qué difícil!	1 2 3 4 5
4. Parece que esto marcha... Me va quedando claro.	1 2 3 4 5
5. ¡Qué difícil, pero que interesante! Tengo que entender cómo se hace	1 2 3 4 5
6. Esto son ganas de hacernos perder el tiempo	1 2 3 4 5
7. Tengo que seguir, que si no lo hago no apruebo	1 2 3 4 5
8. Esto es demasiado difícil... No voy a ser capaz de hacerlo bien	1 2 3 4 5
9. Tranquilo/a… Sin prisa pero sin pausa, que me sale	1 2 3 4 5
10. Esto no está bien... Bueno… Voy a repasar despacio	1 2 3 4 5
11. ¡Vaya instrucciones más largas! Sólo sirven para liar.	1 2 3 4 5
12. ¡Qué lio! Pero venga, que si no lo termino me van a suspender	1 2 3 4 5
13. A mí esto no se me da. Si pudiera lo dejaba.	1 2 3 4 5
14. Bueno… Creo que voy progresando… Cada vez se me da mejor.	1 2 3 4 5
15. ¡Qué complicado!... Bueno, voy a seguir que es importante aprender a resolverlo	1 2 3 4 5
16. ¡Qué aburrimiento de tarea! A ver si termino y la dejo	1 2 3 4 5
17. ¡Qué tarea tan cansada!…Pero hay que aprobar… Así que seguiré	1 2 3 4 5
18. Me estoy poniendo nervioso/a... A mí esto no me sale.	1 2 3 4 5
19. ¡Qué interesante! Parece que me voy enterando.	1 2 3 4 5
20. Aquí estaba el error. Estupendo. Ya sé que hacer la próxima vez.	1 2 3 4 5

Apéndice 5

Criterios corrección prueba conocimientos previos

1. Son números naturales y sirven para describir las mismas situaciones que los números naturales.

2.

a) 3 - (6) = -3 b) 7 - (-7) = 14 c) (3) * (-8) = -24

3. Una fracción es un número que sirve para expresar una división del tiempo en períodos regulares tales como años, estaciones, meses, semanas, días, horas…

4.

a) (7/12) + (3/ 11) = (77+36 /132= 113/132) b) (8/15) - (6/18) = (1/5)

c) (7/9) * (4/6) = (28/34) d) (5/9) : (6 /11) = (55/54)

e) (8/9) * *(3/**4**)* = (24 / 36) f) (7 /12): *(8 /9)* = (63/96)

5. Son aquellas fracciones cuya expresión decimal es exacta y son equivalentes a una fracción con denominador 10 o potencia de 10.

6.

a) 14/3= ***4.66*** *(decimal periódico puro)* b) 7/4= ***1.75****(decimal exacto)* c) 40/8=***5*** *(entero)*

7. Jerarquía de operaciones quiere decir que para resolver un conjunto de operaciones sobre unos números dados, hay una jerarquía en la que primero se resuelven unas operaciones y luego otras. La jerarquía de operaciones es: 1º paréntesis y corchetes; 2º potencias y raíces; 3º multiplicaciones y divisiones; y 4º sumas y restas

8.

a) 9: (-2) * 8 + 32 – 7 = (-4.5).8+25=-36+25=-11

b) 8 * (-7) - 340= 56-340=-284

c) (12/ 5) * (15 / 8) + 6 / 19 = (180/40)+ (6/19) = (9/2)+(6/19) = (171+12)/38 = 159/38

d) (15/18) : (8/9) – 74 = (135/144)-74=(135-10656)/144 = - 10521/144

e) 7,48 * 20/43 = 149.6/43

f) 3,75 – 14/ 32 = (120-14)/2 = 106/32

9. Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales; la base de una potencia es el factor que se repite; y el exponente de una potencia es el número de veces que se repite dicha potencia.

10.

a) $a^3 \,.\, a^2 = a^{3+2} = a^5$

b) $a^4 : a^2 = a^{4-2} = a^2$

c) $a^7 \,.\, b^7 = (a \,.\, b)^7$

d) $a^{12} : b^{12} = (a:b)^{12}$

11. R**azón** entre dos números **a** y **b** es el cociente indicado a/b. Y proporción entre los números **a, b, c** y **d**, sucede cuando esos números a, b, c y d forman una proporción si la razón entre a y b es igual a la razón entre c y d. es decir: a/b = c / d. Y se lee: “ a es a b como c es a d” .

12.

a) 3/4 y 7/ 8; como 3 * 8 = 24 y 4 *7 = 28, no forman proporción

b) 6/9 y 2 /3; como 6 * 2 = 12 = 9 * 2, sí forman proporción

c) 7/14 y 1 /2; como 7 * 2 = 14 = 14 * 1, sí forman proporción

13. Repartos directamente proporcionales ocurren cuando, dada la razón de proporcionalidad: T / (x+y+z)= k; las cantidades a repartir (x´,y´ y z´) que corresponden a x, y y z, respectivamente son (para saber si saben qué son repartos directamente proporcionales) :

x´= x . k   y´= y . k   z´= z . k

14.

Razón de proporcionalidad: 140 / (1+2+4)= 20

Los trozos serán de: (1 . 20)= 20 m; (2. 20)= 40m; (4 . 20)= 80 metros

Observa que: 20 + 40 + 80 = 140

15. Para repartir una cantidad T de forma inversamente proporcional entre las cantidades x , y , z, hay que dar los pasos siguientes: 1º calculamos la constante de proporcionalidad k: (k/x) + (k / y) + (k/z) = T; 2º a las cantidades x, y , z les corresponden respectivamente: (para averiguar si saben resolver problemas de proporcionalidad inversa. Conocimiento previo nº 5)

x´= (k/x)   y´= (k/y)   z´= (k/z)

16. Se calcula la constante de proporcionalidad inversa k:

Al que había dedicado 20 minutos le corresponden: (230.8)/ 20= 11,5 minutos; al que había dedicado 15 minutos, le corresponden: (230.8)/15=15,3; y al que había dedicado 10 minutos, le corresponden: (230.8)/10=23 minutos

Cuadro. Conocimientos previos que evalúa cada pregunta de este cuestionario:

Conocprevio/ Problema n.	1	2	3	4	5
1	X				
2		X			
3		X			
4		X			
5		X			
6		X			
7			X		
8			X		
9				X	
10				X	
11					X
12					X
13					X
14					X
15					X
16					X

Apéndice 6

Programa de intervención para la mejora de la autorregulación y transferencia de los conocimientos algebraicos

El presente programa se ha elaborado con la finalidad de mejorar la comprensión de los contenidos algebraicos en tercero de secundaria obligatoria. Para ello, los problemas se han organizado de forma que se lleve a cabo un entrenamiento tanto en las habilidades de autorregulación como de transferencia en el estudiante.

Por su parte, los bloques de problemas de los que consta este programa, se han seleccionado porque constituyen los conocimientos mínimos algebraicos que debería alcanzar un adolescente de tercero de secundaria obligatoria.

Los bloques son de los tipos siguientes:

Tipo 1: Identificación de problemas algebraicos.

Tipo 2: Transcripción de ecuaciones algebraicas.

Tipo 3: Polinomios.

Tipo 4: Sistemas de ecuaciones.

Además, para cada tipo de conocimiento, se han incluido cinco problemas. Así, para cada tipo hay un problema ejemplo y los otros cuatro problemas se han estructurado en un nivel de menor a mayor transferencia con respecto al problema ejemplo.

Recomendaciones para la aplicación del programa

Al inicio de la aplicación del programa, habría que explicar a los adolescentes cuáles son las reglas generales para resolver problemas matemáticos que deberían seguir. Así como también sería necesario darles indicaciones sobre cómo realizar una adecuada autorregulación mientras están resolviendo dichos problemas.

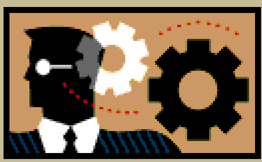
Durante toda la aplicación, sería necesario que hubiera un póster visible para todos los estudiantes participantes, tanto con las reglas de resolución de problemas matemáticos, como con las reglas de autorregulación.

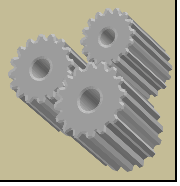
Los problemas deberían aplicarse de la forma siguiente, a lo largo de las distintas sesiones:

SESIONES	PROBLEMAS
SESIÓN 1	Problema ejemplo tipo núm.1 Problema núm.1
SESIÓN 2	Problemas núm. 2, 3 y 4
SESIÓN 3	Problema ejemplo tipo núm.2 Problema núm. 5
SESIÓN 4	Problemas núm. 6, 7 y 8
SESIÓN 5	Problema ejemplo tipo núm.3 Problema núm.9
SESIÓN 6	Problemas núm. 10, 11 y 12
SESIÓN 7	Problema ejemplo tipo núm.4 Problema núm.13
SESIÓN 8	Problemas núm. 12, 15 y 16

Problemas del programa

PRIMERA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Ahora, resuelve el problema que verás a continuación. Se trata de un problema que tiene preguntas seguidas de distintas alternativas de respuesta. Debes leer con detenimiento la pregunta de cada problema y señalar la alternativa que creas que contenga la respuesta correcta.

Por ejemplo, si en el problema hay una pregunta como la siguiente:

¿Cómo se escribe de forma algebraica la expresión *Calcula un número tal que su doble más 8 sea igual a 12*?

a) 3x-8=12

b) 2x+8=12

c) 2+8x=12

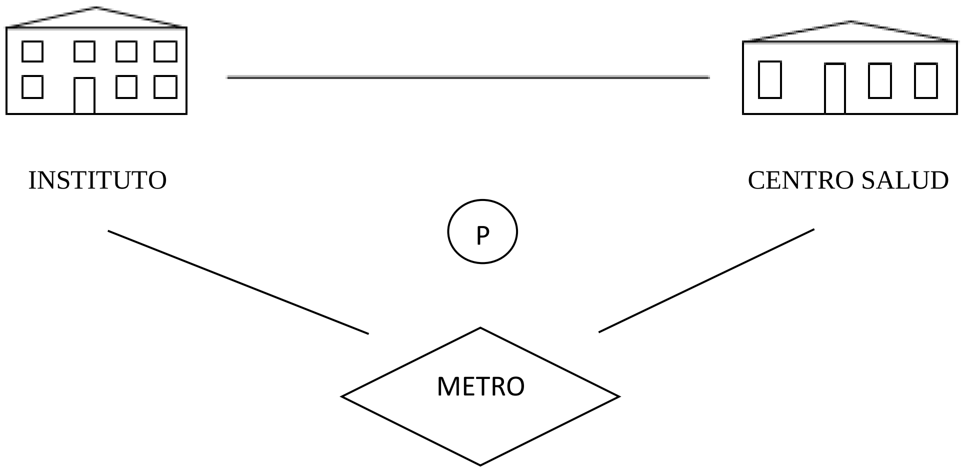
Deberías rodear con un círculo la alternativa b

A continuación, resuelve el problema que se te plantea. Recuerda leer el enunciado con detenimiento y rodear con un círculo la alternativa que creas correcta. Y después, debes contestar unas preguntas sobre cómo has resuelto dicho problema.

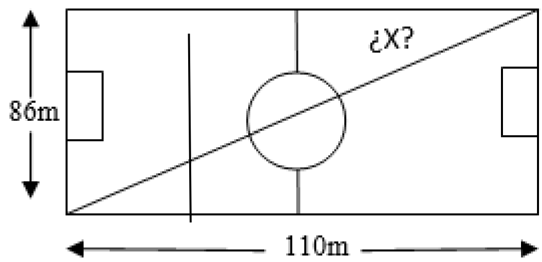
Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

PROBLEMA EJEMPLO TIPO 1: Tacha con una cruz el problema que SÍ se SUELE RESOLVER con métodos ALGEBRAICOS:

a) En un municipio de Madrid se quiere construir un polideportivo que quede a la misma distancia del Centro de Salud, del instituto y de la salida de Metro ¿en qué punto deben construirlo?



b) Como José y Luis han llegado tarde a clase de Educación Física, el profesor les ha castigado a correr 10 veces sobre la diagonal del campo de fútbol rectangular. Si el lado más largo mide 110 metros y el más corto 86 metros, ¿cuál es la distancia total que deben recorrer?



c) En un instituto, la Dirección quiere conocer la opinión que tienen los estudiantes sobre el servicio de autocar. El autocar lo cogen 150 estudiantes de 1ºESO y 100 estudiantes de 2º ESO. Para no tener que preguntar a todos los alumnos, quieren seleccionar a 30, ¿cómo encontrar la muestra más significativa?

Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	

Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

A continuación, resuelve el siguiente problema.

1. Señala cuál de los siguientes problemas SÍ SE SUELE RESOLVER POR MÉTODOS ALGEBRAICOS. Explica tu elección:

a) Anota un número impar.

b) Representa gráficamente el siguiente número irracional: *3,43574*

c) Dibuja en una recta real, el intervalo *[2,3]*.

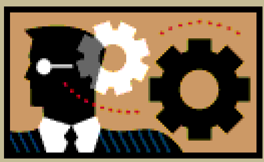
A continuación contesta

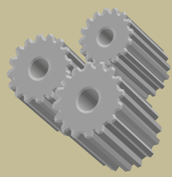
a) **Explica con tus propias palabras: ¿Qué es un problema algebraico? ¿Para qué tiene que haber problemas algebraicos?**

b) ¿Qué problema pondrías tu que pudiera considerarse como algebraico?

c) ¿Tienes mucha seguridad en que eres capaz de resolver este tipo de problemas, o más bien poca?

SEGUNDA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS



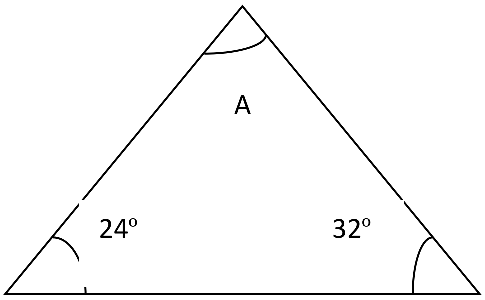


Nombre y apellidos:	
Curso:	Grupo:
Fecha:	

A continuación, resuelve los problemas siguientes:

2 .Señala cuál de los siguientes problemas NO SE SUELE RESOLVER USANDO MÉTODO ALGEBRAICOS. Explica por qué.

a) Halla la medida del ángulo Ă en el siguiente triángulo:



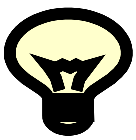
b) Haya las raíces enteras del polinomio: $P(x)=x^2-2x+1$

Las posibles raíces (divisores del término independiente) son: 1 y -1. Se calculan los valores numéricos para cada posible raíz:

$P(1)= 1^2- 2 \cdot 1 +1= 0 \rightarrow$ 1 es raíz.

$P(-1)= (-1)^2 - 2(-1)+1= 4 \rightarrow$ -1 no es raíz.

c) Efectúa la siguiente división: $(52x^3+60x^2) : 12x$



APELLIDOS ________________________________ NOMBRE ____________________

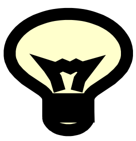
FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	



Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

3. Señala CUÁL de los problemas siguientes SI ES UN PROBLEMA ALGEBRAICO. Explica por qué:

a) Comprueba si los vértices de un cuadrado son simétricos respecto del punto donde se cortan sus diagonales. Hay que recordar que el área de un cuadrado es el cuadrado de uno de los lados.

b) Indica el número que falta en la siguiente sucesión: *3, 8, 13, n, 23*….

c) Se desconoce el largo y el ancho de una piscina, pero se sabe que el largo es el triple que el ancho. El área de la piscina mide $6m^2$. Escribe las expresiones matemáticas que nos dan el perímetro de la piscina.

A continuación, contesta

Cuando un problema te parece difícil, ¿Insistes en resolverlo o abandonas fácilmente?

Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

4. Indica cuál de los siguientes problemas NO es propiamente un problema algebraico. Explica por qué te parece que no lo es:

a) Un profesor de Historia quiere averiguar el número de saludos que se intercambian sus alumnos durante una semana

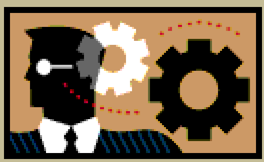
b) Tres amigos opinan acerca de la cantidad de fotos que ha podido hacer un cuarto amigo, Juan, en la última fiesta a la que acudieron. Alberto dice: "Juan hizo más de 15 fotos". Sebastián dice: "Juan hizo menos de 15 fotos, seguro". Y Andrés dice: "Seguro que ha hecho alguna foto". Si tan solo una de las tres afirmaciones es cierta, ¿Cuántas fotos hizo Juan?

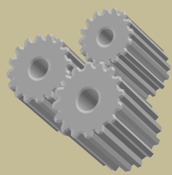
c) En una Asociación de Padres están apuntados 30 padres. Hay que elegir un Presidente y un Vocal. ¿Cuántas elecciones de Presidente y Vocal son posibles?

Por último, contesta

¿Crees que ya sabrías identificar cualquier problema que se deba resolver preferiblemente por métodos algebraicos?

TERCERA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

A continuación, resuelve el problema siguiente:

PROBLEMA EJEMPLO TIPO 2: Indica cómo expresarías de forma algebraica el siguiente problema: “Elena y Carlos están haciendo tres pasteles. Los pasteles pesan 20 gr, 400 gr y 800 gramos respectivamente. Y hay que añadir 30 gramos de azúcar en cada uno de los tres pasteles”.

APELLIDOS ________________________________ NOMBRE ____________________
FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

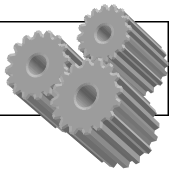
Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	

Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:



5. Indica cuál es la expresión correcta del enunciado: ***si sumamos a 1 un número dado y lo multiplicamos por 3, el resultado es igual que sumar 5 a ese mismo número.***

a) $1+x \cdot 3 = 5 + x.3$

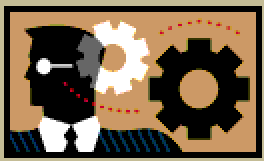
b) $1+x \cdot 3 = 5x$

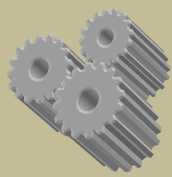
c) $(1+x) \cdot 3 = 5 + x$

A continuación contesta

¿Cómo has comprobado que la opción de respuesta es la acertada y no otra?

CUARTA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

A continuación, resuelve los problemas siguientes:

6. Anota cuál es el enunciado lingüístico que se corresponde con la expresión algebraica: ***(20+1/5x) / (1/4y) = 4***

APELLIDOS ________________________________ NOMBRE ____________________

FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

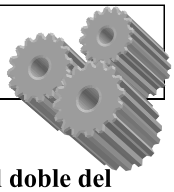
Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	

Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

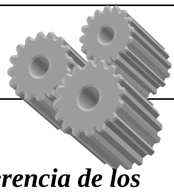


7. Anota la expresión algebraica correcta para la siguiente expresión lingüística: "El doble del cubo de x menos 7 veces el cuadrado de x"

A continuación, contesta

¿Por qué la expresión algebraica que pide el problema no se corresponde con la expresión lingüística siguiente: " El cuadrado del cubo de x menos 7 veces el doble de x"?

Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:



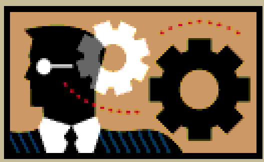
8.Cuál es la expresión algebraica que corresponde al enunciado lingüístico: ***La diferencia de los cuadrados de las edades de Isabel y Lucía es 52. Las edades de ambas son consecutivas.***

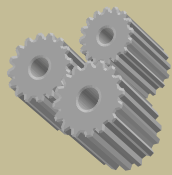
A continuación, contesta ☺

a) ¿Por qué no se correspondería el enunciado con la expresión algebraica siguiente: $(x - y)^2 = 52$**? Explica en qué te has fijado del problema para contestar esto.**

b)¿Tienes ahora más confianza en que eres capaz de resolver problemas como este? Explica por qué

QUINTA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

A continuación, resuelve los problemas siguientes:

PROBLEMA EJEMPLO TIPO 3: Juan e Isabel han pensado cada uno en las dos condiciones siguientes para un polinomio: "*Tiene que ser divisible por el polinomio* x^3+11x^2-x*" y "Un factor suyo debe ser* $x+2$ *". Indica cuál de los siguientes polinomios se ajusta a estas condiciones:*

a) $2x^3+22x^2-x$

$x+2\ (x^3+11x^2-x)= x+2x^3+22x^2-2x= 2x^3+22x^2-x$

b) $x^4+9x^3-22x^2+2x$

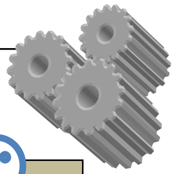
$(x^3+11x^2-x) \cdot (x-2)= x^4+11x^3-x^2-2x^3-22x^2+2x = x^4+9x^3-22x^2+2x$

c) x^4+x-18

$(x^3+11x^2-x) \cdot P\ (x)$

APELLIDOS ________________________________ NOMBRE ___________________

FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

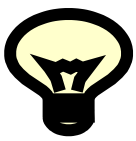


Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

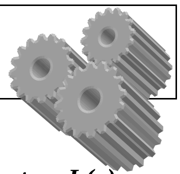
Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	



Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:



9. Indica cuál es el proceso de multiplicación correcto para los dos polinomios siguientes: $I\,(x)= x^3+3x^2+6$ **y** $B(x)= x^4- 4x^3 -2$

a) $(x^3+3x^2+6) \cdot (x^4-4x^3-2) = x^3\,(x^4-4x^3-2) + 3x^2\,(x^4-4x^3-2) + 6\,(x^4-4x^3-2) = x^7-x^6-12x^5+6x^4-26x^3-6x^2-12$

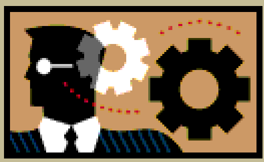
b) $(x^3+3x^2+6) \cdot (x^4-4x^3-2) = x^3 \cdot x^4 - 12x^5-12= x^7-12x^5-12$

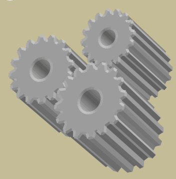
c) $(x^3+3x^2+6) \cdot (x^4-4x^3-2) = x^3 \cdot x^4 + x^3 \cdot (- 4x^3) + x^3\,(-2) = x^7- 4x^6-2x^3$

A continuación, contesta

¿Cómo has comprobado que la opción de respuesta elegida es la acertada?

SEXTA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

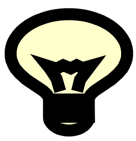
A continuación, resuelve los problemas siguientes:

10. Indica cuál es el valor que tienen que tomar a, b y c para que los polinomios siguientes sean iguales: $P(x)=7x^4-bx^3+4x^2$ **y** $Q(x)=ax^4+3x^3+cx^2$

a) a= 4; b= 3 y c=2

b) a=7; b= - 3 y c=4

c) a = 4; b=-3 y c= 2



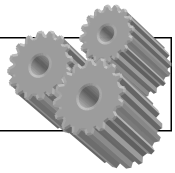
APELLIDOS ________________________________ NOMBRE ___________________
FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente 

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	



Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

11. Indica cuáles son los opuestos de los polinomios siguientes*: P(x)= x^7-6x^4+3; Q(x)= 6x^5+3x^4-2x^2 y Z(x) = 2x^6 + 7x^4+ 9x^2:*

a) - P(x)= -7x-6·4x-3; - Q(x)= +6·5x+3·4x-2·2x ; -Z(x)= 2·6x+7·4x+9·2x

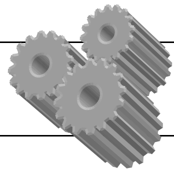
b) - P(x)= $-x^7-6x^4+3$; - Q(x)= $-6x^5-3x^4-2x^2$ y - Z(x) = $2x^6 -7x^4+-9x^2$

c) - P(x)= $-x^7+6x^4-3$;- Q(x)= $-6x^5-3x^4+2x^2$ y- Z(x) =- $2x^6 - 7x^4- 9x^2$

A continuación, contesta

¿En qué te has fijado para seleccionar tu opción?

Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:



12. Mª Luisa piensa que para resolver un problema debe aplicar el polinomio opuesto al polinomio de mayor grado de los siguientes: $x^5-14x^3+17x^4-8$, $x^2-7x^4+9x^6+24$, $x^4-7x^6+5x^3-8x^7+12$, $9x^4+27x^3-48x^5-90$. ¿Qué polinomio será?

a) $-9x^4-27x^3+48x^5+90$

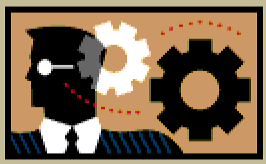
b) $-x^5+14x^3-17x^4-8$

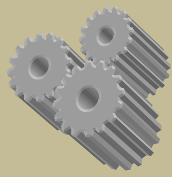
c) $-x^4+7x^6-5x^3+8x^7-12$

A continuación, contesta

¿Tienes más confianza en tu capacidad de resolver problemas de polinomios?

SÉPTIMA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

A continuación, resuelve los problemas siguientes:

PROBLEMA EJEMPLO Nº 4: Para pagar un móvil de 100 euros, he utilizado 8 billetes, unos de 10 euros, y otros de 20 euros, ¿Cuántos billetes de cada clase he utilizado?

APELLIDOS _________________________________ NOMBRE ____________________

FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	

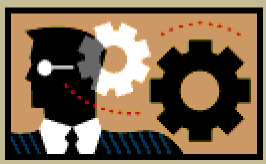
Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:

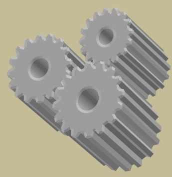
13. Averigua dos números cuya suma es 35 y cuya diferencia es 25:

A continuación, contesta

¿Te ha resultado difícil resolver este problema?, ¿por qué?

OCTAVA SESION_ CUADERNILLO DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS





Nombre y apellidos:	
Curso:	Grupo:
Fecha:	

A continuación, resuelve los problemas siguientes:

14. Si tres kilos de naranjas y dos kilos de mandarinas cuestan 13.97 euros, y 6 kilos de naranjas y 3 kilos de mandarinas cuestan 25.44 euros, ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas?, ¿Y un kilo de mandarinas?

APELLIDOS _______________________________ NOMBRE ___________________

FECHA ____ de ________ de 2016 GRUPO 3º _____

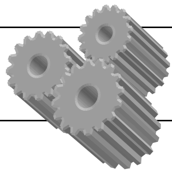
Antes de resolver el problema, presta atención a lo siguiente

Señala con una cruz (X) en el siguiente cuadro, cuáles de los siguientes pasos vas dando conforme vas resolviendo el problema.

NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema.

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un dibujo, esquema, representación gráfica, ejes de coordenadas, etc.	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,...) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc.)	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	

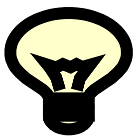
Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:



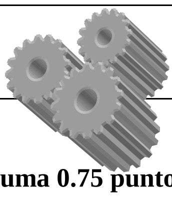
15. ***El producto de dos números es 7200. Si resto 3 al número mayor y le sumo el número menor, da como resultado 177. Calcula dichos números.***

A continuación, contesta 

¿En qué te has fijado para resolver este problema?



Nombre y apellidos:
Curso: Grupo:
Fecha:



16. En Historia han hecho un examen de 30 preguntas. Cada respuesta correcta suma 0.75 puntos y cada respuesta errónea, resta 0.25. Calcula el número exacto de aciertos y de errores que ha tenido un estudiante que ha obtenido un 12.5 en el examen.

A continuación, contesta 

¿Tienes confianza en ser capaz de resolver problemas de sistemas de ecuaciones? Explica por qué

Apéndice 7

Criterios corrección cuaderno problemas.

Problema ejemplo tipo 1: b)

1. a) Respuesta: $2x+1$

2. a)

3. c)

4. c)

Problema ejemplo tipo 2:

Solución: $i+j+k=30$; siendo $j=i^2$ y $k=i^3$

5. c)

6.

Solución: El cociente entre 20 sumado a la quinta parte de un número "x", y la cuarta parte de otro número "y", es igual a 4.

7.

Solución: $2x^3-7x^2$

8.

Solución 1: $x^2 - y^2= 52,$

siendo $y= x+1$

Es correcta porque hace uso de dos incógnitas.

Solución 2: $x^2 - (x+1)^2 = 52$

Es correcta porque hace uso de los monomios, que forman parte del Álgebra.

Problema ejemplo tipo 3: a)

9. a)

10. *b)*

11. c)

12. *c)*

Problema ejemplo nº 4:

Solución:
Si llamamos x: "número de billetes de 10 euros" e y: "número de billetes de 20 euros", entonces tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ 10x+20y=100 \end{array}\right\}$$

y= 8-x
10x+ 20 (8 -x) = 100;
10x + 160 – 20x =100; -10x = - 160 + 100; 10x = 60; x = 6;
Y = 8-x; y: 8-6 = 2.
Por lo tanto, x= 6 billetes de 10 euros; e y = 2 billetes de 20 euros

13.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=35 \\ x-y=25 \end{array}\right\}$$

y = 35 – x;

x – (35- x) = 25; x – 35 + x = 25; 2x = 25 + 35; 2x = 60; x = 60/2; x= 30

y = 35- 30; y = 5

Los dos números son: x= 30; e y = 5

14.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 13.97 \\ 6x + 3y = 25.44 \end{array}\right\}$$

2y= 13.97 – 3x; y = (13.97 – 3x)/2;
6x + 3 [(13.97-3x)/2] = 25.44; 6x + (41.91-9x)/2= 25.44; 12x + 41.91 – 9x = 50.88;
3x = 50.88- 41.91; x= 8.97/3; x= 2.99
y = (13.97 - 3•2.99)/ 2= (13.97- 8.97)/2= 5/2 = 2.5
Por lo tanto, x: el kilo de naranjas cuesta 2.99 euros e y: kilo de mandarinas, cuesta, 2.50 euros.

15.

$$\left.\begin{array}{l}(x-3)+y=177\\ xy=7200\end{array}\right\}$$

Solución: el número mayor es 120 y el número menor es 60.

Si llamamos "x" al número mayor e "y" al número menor:

$y=177+3-x=180-x; y=180-x$

$x(180-x)=7200; 180x-x^2=7200; -x^2+180x-7200=0;$

$(-1)(-x^2+180x-7200)=0; x^2-180x+7200=0;$

$x= [-(-180)\pm\sqrt{(-180)^2-(4)(1)(7200)}]/2(1)=0;$

$x= (180\pm\sqrt{32400-28800})/2= (180\pm\sqrt{3600})/2=(180\pm60)/2=0;$

$$x \begin{cases} \nearrow (180+60)/2=240/2=120 \\ \searrow (180-60)/2= 120/2=60 \text{ (solución no válida)} \end{cases}$$

$y=180-x= 180-120=60; y=60$

16.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=30\\ 0.75x-0.25y=12.5\end{array}\right\}$$

Solución: el estudiante ha tenido 20 aciertos y 10 errores.

$y= 30 – x;$

$0.75x – 0.25 (30 - x) = 12.5; 0.75 x – 7.5 + x = 12.5; 0.25x = 12.5 + 7.5; 0.25x = 5; x = 5/0.25; x = 20$

$y= 30 – 20; y = 10.$

El estudiante ha tenido x : 20 aciertos e y: 10 errores.

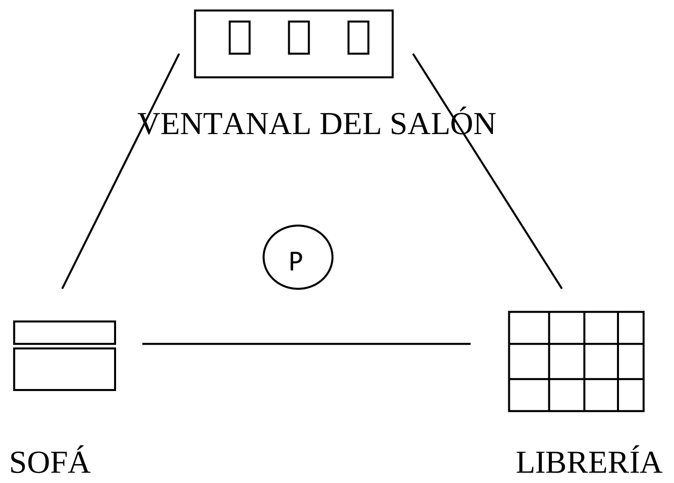
Apéndice 8

Prueba de transferencia

Nombre y apellidos:	
Curso:	Grupo:
Fecha:	

***PROBLEMA Nº 1**: Indica cuál de los siguientes problemas SÍ se SUELE RESOLVER de manera ALGEBRAICA:*

a) En un salón, se quiere poner la mesa de comedor de manera que quede a la misma distancia del sofá, la librería y el ventanal de dicho salón ¿en qué punto deben poner la mesa de comedor?



b) Marta y Victoria han ido de compras. Marcos ha comprado calcetines y Victoria ha comprado pañuelos. En la tienda había el doble de calcetines que de pañuelos. El total de calcetines y pañuelos era 100. ¿Cuántos pañuelos y calcetines había en la tienda?

c) En una calle de Madrid, la alcaldía quiere conocer la opinión que tienen los ciudadanos sobre el servicio de autobús público que tiene dos paradas en dicha calle. Se estima que el autobús lo cogen a diario unas 250 personas en la primera parada y unas 200 personas en la segunda parada. Para no tener que buzonear la encuesta a todos los ciudadanos que viven en la calle, quieren seleccionar a unas 100 personas en total, ¿cómo encontrar la muestra más significativa?

PROBLEMA Nº 2. *Indica cuál de los siguientes problemas NO es propiamente un problema Algebraico. Explica por qué te parece que no lo es:*

a) Una empresa alimenticia quiere averiguar el número de productos que se reparten en las empresas distribuidoras cada quince días.

b) Tres amigos opinan acerca de la marca que ha podido hacer un atleta de velocidad en las últimas Olimpiadas. Juan dice: "hizo el recorrido en más de 15 segundos". Jorge dice: "hizo el recorrido en menos de 15 segundos, seguro". Y Manuel dice: "Seguro que ha hecho el recorrido con alguna de estas marcas". Si tan solo una de las tres afirmaciones es cierta, ¿En cuánto hizo el recorrido el atleta?

c) Al elegir Delegado y subdelegado en una clase de 30 alumnos, ¿Cuántas elecciones son posibles?

PROBLEMA Nº 3. *Señala cuál de los siguientes problemas NO es propiamente un problema algebraico:*

a) Escribe de forma verbal lo que quiere decir la expresión: "$4x^3-2x^2$"

b) Realiza este producto: $(4xy^2).\ (2x^2yz)$

c) Las coordenadas de los vértices de un triángulo son A(1,2), B (3,3) y C (4,2).

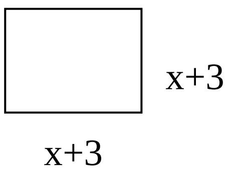
Representa el triángulo

Traslada el triángulo según el vector guía û(2,8).

PROBLEMA Nº 4: *Indica cómo expresarías de forma algebraica el problema siguiente: "Tres amigos tienen como mínimo 50 euros cada uno. María tiene el cuadrado de euros que tiene Isabel. Y Carlos tiene el triple de euros que tiene María.*

PROBLEMA Nº 5. *Cuál es la expresión algebraica que corresponde al enunciado lingüístico: La puntuación máxima en ventas de dos vendedores son consecutivas. La diferencia entre ambas es 94.*

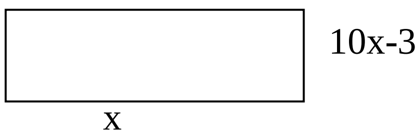
PROBLEMA Nº 6. *Indica cuál es la expresión algebraica que se corresponde con la representación gráfica siguiente:*



PROBLEMA Nº 7: *Ismael dice a sus amigos que el polinomio de mayor grado es el que explica los resultados de un ejercicio de geometría. ¿Cuál sería dicho polinomio de entre los siguientes?: $20x^3$-$8x^4$+9; $3x^8$+$4x^2$-7; $17x^5$. $63x^2$; y $33x^6$- $17x^2$+ 28.*

PROBLEMA Nº 8. *Luisa ha pensado para resolver un problema en el siguiente polinomio p (x): x^4-$3x^3$+1, que tiene que tener el valor numérico de 9 y de 5. ¿Para qué valores de x se obtienen dichos valores numéricos?*

PROBLEMA *Nº 9*. *Jorge quiere pintar su habitación, que es rectangular, midiendo el lado más corto del suelo 10x-3 metros. Si llamamos "x" al lado más largo, cuál es el polinomio que daría el área de dicha habitación:*



PROBLEMA Nº 10. *Los pañuelos de Isabel valen 480 euros en total. Tiene un mismo número de pañuelos de 15 euros que de 20 euros. Hallar el número de pañuelos de cada tipo.*

PROBLEMA Nº 11. *Un fabricante de ropa obtiene un beneficio de de 2 euros por cada prenda que sale para venta, y tiene una pérdida de 3 euros por cada prenda defectuosa. En una jornad fabrica 2000 prendas, y obtiene unos beneficios de 500 euros. ¿Cuántas prendas válidas y cuántas defectuosas se han fabricado en ese día?*

PROBLEMA Nº 12. *José ha sacado un resultado de 11 en un test de 30 preguntas, en donde cada respuesta correcta sumaba 1 punto y cada respuesta incorrecta restaba 0.5 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores ha tenido?*

Apéndice 9

Criterios corrección prueba de transferencia

1. b)

2. c)

3. c)

4.

Siendo; María: i ; Isabel: j ; y Carlos: k

Solución: $i+j+k=50$; siendo $i=j^2$ y $k=i^3$

4.

Solución: $x^2 - (x+1)^2 = 94$

5.

Solución: $3x^{8}+$

6.

Solución: $(x-3)^2$

7.

Solución: $P(x) = x^4-3x^3+1 = 9$; siendo $x= 2$

y $P(x) = x^4-3x^3+1=5$; siendo $x= -1$

8.

Solución: $\left.\begin{array}{r} x+y=480 \\ 15x=20y \end{array}\right\}$

9.

Solución: $A= (10x-3)\, x$

10.

Si llamamos x a : “los pañuelos que cuestan 15 euros” e y a : “los pañuelos que cuestan 20 euros ”

$\left.\begin{array}{l} x+y=40 \\ 2x-y=20 \end{array}\right\}$

11.

Si llamamos x al: "nº de prendas válidas" e y al "nº de prendas defectuosas":

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2000 \\ 2x - 3y = 500 \end{array}\right\}$$

$y = 2000 – x;$

$2x – 3 (2000 – x) =500; 2x – 6000 + 3x = 500;$

$5x = 6000 + 500; 5x = 6500 ; x = 1300;$

$y = 2000 – 1300 = 700$

Solución: hay 1300 prendas válidas y 700 prendas defectuosas.

12.

Si llamamos a x= "nº de respuestas acertadas" e y= "nº respuestas erróneas", entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ x – 0.5\, y = 11 \end{array}\right\}$$

$y= 30-x;$
$x- 0.5 (30 - x) = 11; x – 15 + x = 11; 2x = 26; x = 26/2; x = 13;$
$y= 30 – 13 = 17$

Solución: tiene 13 respuestas contestadas bien y 17 preguntas contestadas mal.

Apéndice 10

Prueba evaluación autorregulación post. Cuestionario "on line" y preguntas directas

Al finalizar la aplicación del programa, se pasó una prueba de post evaluación, y al finalizar la misma, se incluyó un cuestionario sobre autorregulación y unas preguntas para que los estudiantes las contestaran de forma directa.

A continuación contesta las siguientes preguntas:

1. Señala con una cruz (X) los pasos que has dado para resolver los problemas del 4 al 12.

RECUERDA QUE NO ES OBLIGATORIO SEGUIR TODOS LOS PASOS en cada tipo de problema

Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece	
Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	
Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	
He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	
Otro:	
Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un DIAGRAMA (dibujo, esquema, etc)	
He anotado los datos que me da el problema	
He escrito la o las incógnitas (x, y, z,…) para los números desconocidos	
He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc)	
Otro:	
Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	
Otro:	
Paso 4. RESUELVO el problema	
He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	
He escrito la solución al problema.	
He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	
Otro:	

Preguntas directas sobre autorregulación

2. ¿Te han resultados fáciles o difíciles de resolver los problemas anteriores?, ¿por qué?
3. Por último, ¿has aumentado tu confianza en resolver problemas algebraicos? Explica los motivos

Apéndice 11

Criterios corrección pruebas autorregulación post (cuantitativos y cualitativos). C.A.R. y preguntas directas SR finales

Criterios evaluación cuantitativa del C.A.R.

El estudiante puede obtener una puntuación cuantitativa máxima de 4 puntos, si ha llevado a cabo cada uno de los cuatro pasos de autorregulación. Por su parte, las puntuaciones parciales dentro de cada sub apartado, son proporcionales con respecto a la puntuación de 1, tal y como se indica la tabla siguiente. Por ejemplo, un adolescente que haya leído el enunciado del problema, obtendrá un 0.25 en el apartado de "*Tipología del problema*". Si además, ha anotado los datos y hecho un gráfico, obtendrá 0.50 puntos en el apartado de "*Organizar la información*". Y, finalmente, si ha resuelto la ecuación, obtendrá 0.25 en el apartado de "*Resolver el problema*". En este caso, la puntuación cuantitativa total del estudiante en el C.A.R. sería de 1 puntos.

Criterios evaluación cualitativa del C.A.R.

Por su parte, para llevar a cabo una *evaluación cualitativa del CAR*, se anota un "1" si el adolescente ha llevado a cabo el criterio de evaluación, o un "0" si no lo ha llevado, según los criterios siguientes:

Tipología: El estudiante ha sido capaz de llevar a cabo una clasificación del tipo de problema, lo cual corresponde a realizar el paso 1 para resolver el problema.

Organiza: El adolescente ha llevado a cabo una organización de la información del problema, que corresponde al paso 2 para resolver el problema.

Plan: El estudiante ha elaborado un plan de resolución, que corresponde al paso 3 para resolver el problema.

Resuelve: El adolescente despeja las incógnitas y finalmente resuelve el problema, que corresponde al paso 4 para resolver el problema.

Los criterios de evaluación cuantitativa y cualitativa son los siguientes:

Evaluación Cualitativa	*Paso 1. Busco a qué TIPO de problema pertenece*	***Evaluación cuantitativa***
1.	Procuro leer y entender cada frase del enunciado.	***0.25***
2.	Si tengo dudas con alguna palabra, pregunto el significado al profesor.	***0.25***
3.	He intentado encontrar en este problema similitudes con problemas que ya conozco.	***0.25***
4.	Otro:	***0.25***
	Puntuación total:	***1***
	Paso 2. Organizo la información haciendo uso de un DIAGRAMA (dibujo, esquema, etc)	
5.	He anotado los datos que me da el problema	***0.25***
6.	He escrito la o las incógnitas (x, y, z,…) para los números desconocidos	***0.25***
7.	He construido un gráfico (esquema, eje de coordenadas, dibujo, etc)	***0.25***
8.	Otro:	***0.25***
	Puntuación total:	***1***
	Paso 3. Hago un PLAN para resolver el problema	
9.	He transformado la información de mi diagrama en una frase o ecuación algebraica.	***0.50***
10.	Otro:	***0.50***
	Puntuación total:	***1***
	Paso 4. RESUELVO el problema	
11.	He averiguado el número desconocido en la ecuación algebraica.	***0.25***
12.	He escrito la solución al problema.	***0.25***
13.	He comprobado si mi solución tiene sentido con respecto al enunciado del problema.	***0.25***
14.	Otro:	***0.25***
	Puntuación total:	***1***
	PUNTUACIÓN CUANTITATIVA MÁXIMA DEL C.A.R.	***4***

Evaluación cualitativa de las preguntas directas de S.R. al finalizar el programa:

Cada una de las preguntas directas de autorregulación, tienen una puntuación de “0” o “1”, en función de si el estudiante tiene la percepción de haber conseguido lo que se indica en la pregunta o no. En cuanto a los criterios de evaluación para las dos preguntas restantes, son los siguientes:

Facilidad de la nueva tarea: El adolescente considera que los nuevos problemas son más sencillos, según la pregunta 2.

Confianza: El estudiante se siente con más confianza con respecto a la tarea de resolver problemas, según la pregunta 3.

Mejora: El adolescente percibe los nuevos problemas como más sencillos y se siente con más confianza en la tarea de resolver problemas, según las preguntas 2 y 3.